

© 2025 г. М.М. КОГАН, д-р физ.-мат. наук (mkogan@nngasu.ru)
(Научно-технологический университет “Сириус”, Сочи),
А.В. СТЕПАНОВ (andrey8st@yahoo.com)
(Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет)

ОПТИМАЛЬНАЯ АБСОЛЮТНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕИЗВЕСТНЫХ СИСТЕМ ЛУРЬЕ НА ОСНОВЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ И АПРИОРНЫХ ДАННЫХ¹

Для систем Лурье, состоящих из неизвестной линейной подсистемы и неизвестных нелинейных функций, лежащих в заданных секторах, разработан метод построения оптимального абсолютно стабилизирующего управления на основе экспериментальных и априорных данных. В основе метода лежит минимаксный подход, при котором максимизация интегрального квадратичного функционала осуществляется на пересечении двух матричных эллипсоидальных множеств, выделяемых по экспериментальным и априорным данным. Результаты математического моделирования нелинейного осциллятора показывают преимущество получаемого закона управления над классическим робастным управлением, синтезируемым на основе априорной информации.

Ключевые слова: системы Лурье, неопределенность, робастное управление, экспериментальные данные, линейные матричные неравенства.

DOI: 10.31857/S0005231025020014, **EDN:** IRNEBG

1. Введение

В данной статье для построения законов управления нелинейными системами Лурье [1], состоящими из неизвестных линейных подсистем и неизвестных нелинейных функций, принадлежащих заданным секторам, применяются методы построения законов управления неизвестными линейными динамическими объектами, разработанные в [2–4]. Отсутствие математической модели управляемого объекта здесь восполняется данными измерений траектории системы на конечном интервале времени и некоторой априорной информацией. При этом не решается задача идентификации объекта, а достижение цели управления происходит даже в условиях неидентифицируемости. В основу этих методов положен минимаксный подход к построению робастного управления, при котором находится гарантируемое значение целевого функционала для любого объекта из некоторого множества неопределенности. В отличие

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 24-11-20023).

от классического робастного управления (см., например, обзор [5]), в котором это множество выбирается только по априорной информации, здесь множество неопределенности выделяется как на основе данных, полученных в эксперименте, так и на основе априорной информации. Это позволяет получить закон управления, обеспечивающий, как будет видно из дальнейшего, значительно меньшее гарантированное значение целевого функционала.

Использованию экспериментальной информации для непосредственного построения законов управления в последнее время уделяется большое внимание (см., например, [6–8] и библиографию, приведенную в [2–4]). В основном эти работы касаются построения законов управления линейными системами. К настоящему времени авторам известна только статья [9], посвященная синтезу управления на основе экспериментальных данных для систем с нелинейной вектор-функцией, удовлетворяющей квадратичному неравенству. В [9] предполагается, что во время эксперимента отсутствуют возмущения и что управление обеспечивает выполнение так называемого условия исключающего возбуждения, необходимого для идентифицируемости неизвестных параметров. Кроме того, размерность переменных в линейных матричных неравенствах для вычисления параметров регулятора растет с увеличением числа измерений, что усложняет реализацию закона управления. В отличие от этого рассматриваемый ниже подход охватывает системы с несколькими нелинейными секторными функциями, во время эксперимента присутствуют возмущения, не требуется идентифицируемость системы, размерности переменных определяются только размерностями векторов состояния и управления и не зависят от числа измерений.

2. Постановка задачи

Рассмотрим неопределенную управляемую нелинейную систему Лурье, состоящую из линейной системы

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \partial x(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Fv(t), \\ z(t) &= Cx(t) + Du(t), \end{aligned}$$

замкнутой нелинейной непрерывной вектор-функцией

$$(2.2) \quad v(t) = \varphi(y(t), t), \quad y(t) = L^T x(t),$$

где ∂ – оператор дифференцирования в непрерывном случае или оператор сдвига на единицу вперед в дискретном случае, $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ – состояние, $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ – выход, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ – управление, $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$ – целевой выход, $\varphi(y, t) \in \mathbb{R}^{n_v}$ – неизвестная нелинейная вектор-функция, $\varphi(0, t) \equiv 0$. Каждая компонента $\varphi_i(y_i, t)$ функции (2.2) при всех $t \geq 0$ расположена в соответствующем конечном секторе $[\alpha_i, \beta_i]$, т.е.

$$(2.3) \quad \alpha_i \leq \frac{\varphi_i(y_i, t)}{y_i} \leq \beta_i, \quad i = 1, \dots, n_y.$$

Предполагается, что матрицы системы A , B и F неизвестны и начальное состояние $x(0) = x_0$ не определено. Постановка задачи далее будет уточнена, но в общем плане требуется на основе априорной информации и данных, полученных из экспериментов, синтезировать линейные обратные связи по состоянию $u(t) = \Theta x(t)$, при которых замкнутая система будет абсолютно устойчивой, т.е. состояние равновесия $x = 0$ системы (2.1), (2.2) асимптотически устойчиво для всех функций $\varphi(y, t)$ из указанного класса, и при этом гарантируется следующая оценка переходного процесса при произвольных начальных условиях:

$$(2.4) \quad \sup_{x_0 \neq 0} \frac{\|z\|^2}{x_0^T R^{-1} x_0} < \gamma^2,$$

где $R = R^T > 0$ – весовая матрица, $\|\xi\|^2 = \sum_{t=0}^{\infty} |\xi(t)|^2$ в дискретном случае и $\|\xi\|^2 = \int_{t=0}^{\infty} |\xi(t)|^2 dt$ в непрерывном случае.

3. Экспериментальные и априорные данные

Информация о неизвестных параметрах системы (2.1) извлекается из конечного набора измерений ее траектории. Допустим, что во время эксперимента на систему действует возмущение $w(t)$ так, что уравнения системы имеют вид

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \partial x(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Fv(t) + B_w w(t), \\ z(t) &= Cx(t) + Du(t). \end{aligned}$$

Предполагается также, что в эксперименте, предшествующем синтезу управления, имеется возможность измерять значения нелинейной функции в системе, принадлежащей заданным секторам. Предположим, что в случае дискретной системы получены измерения состояния x_0, x_1, \dots, x_N и нелинейной функции $\varphi(y_0, 0), \dots, \varphi(y_{N-1}, N-1)$ при выбранных управлениях u_0, \dots, u_{N-1} и некотором неизвестном возмущении w_0, \dots, w_{N-1} . Составим матрицы

$$\begin{aligned} X &= (x_0 \cdots x_{N-1}), \quad X_+ = (x_1 \cdots x_N), \quad U = (u_0 \cdots u_{N-1}), \\ \Phi &= (\varphi(y_0, 0) \cdots \varphi(y_{N-1}, N-1)), \quad W = (w_0 \cdots w_{N-1}). \end{aligned}$$

В случае непрерывной системы допустим, что имеются измерения в моменты времени t_0, \dots, t_{N-1} состояния $x(t_0), \dots, x(t_{N-1})$, производных состояния $\dot{x}(t_0), \dots, \dot{x}(t_{N-1})$ и нелинейной функции $\varphi(y(t_0), t_0), \dots, \varphi(y(t_{N-1}), t_{N-1})$ при выбранных управлениях $u(t_0), \dots, u(t_{N-1})$ и некоторых неизвестных возмущениях $w(t_0), \dots, w(t_{N-1})$. Составим матрицы

$$\begin{aligned} X &= (x(t_0) \cdots x(t_{N-1})), \quad X_+ = (\dot{x}(t_0) \cdots \dot{x}(t_{N-1})), \quad U = (u(t_0) \cdots u(t_{N-1})), \\ \Phi &= (\varphi(y(t_0), t_0) \cdots \varphi(y(t_{N-1}), t_{N-1})), \quad W = (w(t_0) \cdots w(t_{N-1})). \end{aligned}$$

Для матриц с экспериментальными данными в непрерывном и дискретном случаях имеют место соотношения

$$(3.2) \quad X_+ = A_{real}X + B_{real}U + F_{real}\Phi + B_wW,$$

в которых A_{real} , B_{real} и F_{real} – реальные неизвестные матрицы уравнений системы. Обозначим:

$$\Delta_{real} = (A_{real} \ B_{real} \ F_{real}), \quad \widehat{X} = \text{col}(X, U, \Phi)$$

и запишем уравнения (3.2) в виде линейной матричной регрессии

$$(3.3) \quad X_+ = \Delta_{real}\widehat{X} + \widehat{W}, \quad \widehat{W} = B_wW.$$

Допустим, что возмущения, включающие в том числе ошибки приближенного вычисления производных, удовлетворяют условию

$$(3.4) \quad \widehat{W}\widehat{W}^T \leq \Omega.$$

В частности, если ошибки при всех t удовлетворяют ограничению $\|w(t)\|_\infty \leq d_w$ для некоторого заданного d_w , которое будем называть уровнем ошибки, то $\Omega = d_w^2 n_w N B_w B_w^T$. В случае, когда суммарная “энергия” возмущений во время эксперимента ограничена $\sum_{i=0}^{N-1} |w(t_i)|^2 \leq \nu^2$, то $\Omega = \nu^2 B_w B_w^T$.

Определим множество $\Delta_{\mathbf{p}}$ матриц Δ порядка $n_x \times (n_x + n_u + n_y)$, которые могли бы генерировать полученные в эксперименте матрицы Φ , Φ_+ и Z при выбранных управлениях U и некоторых допустимых ошибках \widehat{W} , удовлетворяющих ограничению (3.4). Для этих матриц равенство (3.3) должно выполняться при некоторой \widehat{W} , удовлетворяющей (3.4). Следовательно,

$$\Delta_{\mathbf{p}} = \left\{ \Delta : X_+ = \Delta\widehat{X} + \widehat{W}, \quad \widehat{W}\widehat{W}^T \leq \Omega \right\}$$

и $\Delta \in \Delta_{\mathbf{p}}$ тогда и только тогда, когда

$$(3.5) \quad (X_+ - \Delta\widehat{X})(X_+ - \Delta\widehat{X})^T \leq \Omega.$$

Очевидно, что $\Delta_{real} \in \Delta_{\mathbf{p}}$. Для дальнейшего применения представим последнее неравенство в виде

$$(3.6) \quad (\Delta \ I) \Psi^{(1)} (\Delta \ I)^T \leq 0,$$

где симметрическая матрица $\Psi^{(1)}$ порядка $2n_x + n_u + n_y$ разбивается на блоки $\Psi_{ij}^{(1)}$, $i, j = 1, 2$ соответствующего порядка и вычисляется следующим образом:

$$(3.7) \quad \Psi^{(1)} = \begin{pmatrix} \widehat{X}\widehat{X}^T & | & \star \\ \hline -X_+\widehat{X}^T & | & X_+X_+^T - \Omega \end{pmatrix}.$$

Таким образом, множество матриц Δ , согласованных с полученными экспериментальными данными, удовлетворяет неравенству (3.6).

Покажем, что множество $\Delta_{\mathbf{p}}$ является, вообще говоря, неограниченным, и выясним, при каких условиях оно будет ограниченным. Для этого обозначим через $\text{Im}(\cdot)$, $\text{Ker}(\cdot)$, $\text{span}(\cdot)$ и $\text{rank}(\cdot)$ образ, ядро, линейное подпространство столбцов и столбцовый ранг соответствующей матрицы. Допустим, что $\text{rank } \hat{X} = s \leq \min\{n_x + n_u + n_y, N\}$ и представим матрицу \hat{X} в виде сингулярного разложения [10]

$$(3.8) \quad \hat{X} = (M_1 \ M_2) \begin{pmatrix} \Sigma & 0_{s \times (N-s)} \\ 0_{(n_x+n_u+n_y) \times s} & 0_{(n_x+n_u+n_y) \times (N-s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_1^T \\ G_2^T \end{pmatrix} = M_1 \Sigma G_1^T,$$

$$M_1 \in \mathbb{R}^{(n_x+n_u+n_y) \times s}, \quad M_2 \in \mathbb{R}^{(n_x+n_u+n_y) \times (n_x+n_u+n_y-s)}, \quad M = (M_1 \ M_2),$$

где $\Sigma = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_s) > 0$, λ_i – собственные числа информационной матрицы $\hat{X} \hat{X}^T$, $\text{span } M_1 = \text{Im } \hat{X}$, $\text{span } M_2 = \text{Ker } \hat{X}^T$, $\text{span } G_1 = \text{Im } \hat{X}^T$, $\text{span } G_2 = \text{Ker } \hat{X}$, $M^T M = I$. Выберем ортонормированный базис, состоящий из столбцов матрицы M , введем соответствующие переменные

$$\hat{\Delta} = \Delta (M_1 \ M_2) = \left(\hat{\Delta}^{(1)} \ \hat{\Delta}^{(2)} \right), \quad \hat{\Delta}^{(1)} \in \mathbb{R}^{n_x \times s}, \quad \hat{\Delta}^{(2)} \in \mathbb{R}^{n_x \times (n_x+n_u+n_y-s)}$$

и обозначим $\hat{X}^{(1)} = M_1^T \hat{X} = \Sigma G_1^T$. Тогда линейная матричная регрессия (3.3) в новых переменных запишется как

$$(3.9) \quad X_+ = \hat{\Delta}_{real}^{(1)} \hat{X}^{(1)} + \hat{W},$$

где $(s \times N)$ -матрица $\hat{X}^{(1)}$ имеет полный строчный ранг, а $\hat{\Delta}_{real}^{(1)}$ – “проекция” матрицы $\hat{\Delta}_{real}$ на подпространство $\text{Im } \hat{X}$, т.е. строки матрицы $\hat{\Delta}_{real}^{(1)}$ являются проекциями строк матрицы $\hat{\Delta}_{real}$ на подпространство $\text{Im } \hat{X}$.

Лемма 3.1. Множество $\Delta_{\mathbf{p}}$ матриц, согласованных с экспериментальными данными $\hat{X} = \text{col}(X, U, \Phi)$, для которых верно (3.8), представляет собой неограниченный вырожденный “матричный эллипсоид”, определяемый как

$$(3.10) \quad (\hat{\Delta}^{(1)} - \hat{\Delta}_{LS}^{(1)}) \Sigma^2 (\hat{\Delta}^{(1)} - \hat{\Delta}_{LS}^{(1)})^T \leq \Gamma, \quad \hat{\Delta}^{(2)} \in \mathbb{R}^{n_x \times (n_x+n_u+n_y-s)},$$

где

$$(3.11) \quad \Gamma = \Omega + X_+ [\hat{X}^{(1)T} \Sigma^{-2} \hat{X}^{(1)} - I] X_+^T \geq 0,$$

$\hat{\Delta}_{LS}^{(1)} = X_+ \hat{X}^{(1)T} \Sigma^{-2}$ – оценка методом наименьших квадратов матрицы $\hat{\Delta}_{real}^{(1)}$ в (3.9).

Следствие 3.1. Множество $\Delta_{\mathbf{p}}$ ограничено тогда и только тогда, когда выполнено ранговое условие

$$(3.12) \quad \text{rank} \begin{pmatrix} X \\ U \\ \Phi \end{pmatrix} = n_x + n_u + n_y.$$

В этом случае множество $\Delta_{\mathbf{p}}$ состоит из матриц, определяемых неравенством (3.10), в котором $\widehat{\Delta}^{(1)} = \widehat{\Delta}$ и $\widehat{\Delta}_{LS}^{(1)} = \widehat{\Delta}_{LS}$.

Доказательство леммы приведено в Приложении. Из этой леммы следует, что по полученным данным в общем случае можно идентифицировать только $\widehat{\Delta}_{real}^{(1)}$ – “проекцию” неизвестной матрицы на подпространство $\text{Im } \widehat{X}$. При выполнении рангового условия (3.12) матрица Δ_{real} в (3.3) идентифицируема, а “матричный эллипсоид” и соответственно множество $\Delta_{\mathbf{p}}$ ограничены. Отметим, что для выполнения рангового условия (3.12) необходимо, чтобы количество измерений было не меньше, чем сумма размерностей векторов состояния, выхода и управления, т.е. $N \geq n_x + n_u + n_y$. В рассматриваемом здесь синтезе робастного управления не требуется выполнения рангового условия и количество экспериментов может быть меньше, чем $n_x + n_u + n_y$.

Далее, пусть имеется дополнительная информация о том, что неизвестная матрица Δ_{real} удовлетворяет ограничению

$$(3.13) \quad (\Delta - \Delta_*)(\Delta - \Delta_*)^T \leq \rho^2 I, \quad \Delta_* = (A_* B_* F_*),$$

в котором Δ_* содержит соответствующие матрицы номинального объекта, а ρ – параметр, характеризующий размер области неопределенности. Запишем это неравенство в виде

$$(3.14) \quad (\Delta \quad I) \Psi^{(2)} (\Delta \quad I)^T \leq 0,$$

где матрица $\Psi^{(2)}$ состоит из блоков $\Psi_{ij}^{(2)}$, $i, j = 1, 2$ и имеет вид

$$(3.15) \quad \Psi^{(2)} = \begin{pmatrix} I & | & * \\ \hline -\Delta_* & | & \Delta_* \Delta_*^T - \rho^2 I \end{pmatrix}.$$

Обозначим: $\Delta_{\mathbf{a}}$ – множество матриц, которые удовлетворяют неравенству (3.14), и $\Delta_{\text{set}} = \Delta_{\mathbf{p}} \cap \Delta_{\mathbf{a}}$ – множество матриц, которые удовлетворяют неравенствам (3.6) и (3.14). Очевидно, что $\Delta_{real} \in \Delta_{\text{set}}$. На рис. 1 для иллюстрации схематично изображен один из возможных вариантов расположения множеств $\Delta_{\mathbf{p}}$, $\Delta_{\mathbf{a}}$ и их пересечения Δ_{set} .

С учетом введенных обозначений задача оптимальной абсолютной стабилизации неизвестной системы Лурье (2.1) может быть сформулирована так: не строя математическую модель, синтезировать закон управления $u = \Theta x$, при котором для всех систем, матрицы которых согласованы с априорными

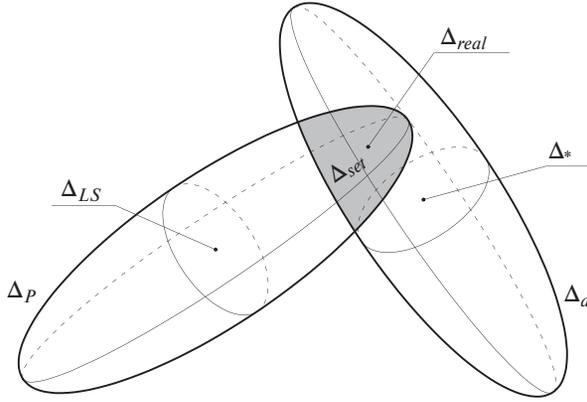


Рис. 1. Множество Δ_{set} неизвестных параметров Δ , согласованных с экспериментальными и априорными данными.

и экспериментальными данными и нелинейные функции принадлежат заданным секторам (2.3), замкнутая система будет абсолютно устойчивой и функционал $J(\Theta)$ ограничен заданной константой, т.е.

$$(3.16) \quad J(\Theta) = \sup_{\Delta \in \Delta_{\text{set}}} \sup_{\varphi(y,t)} \sup_{x_0 \neq 0} \frac{\|z\|^2}{x_0^T R^{-1} x_0} < \gamma^2.$$

4. Предварительные преобразования и вспомогательные утверждения

Рассмотрим класс систем Лурье, в которых компоненты вектор-функции $\varphi(y, t)$ удовлетворяют условию (2.3). Прежде, чем перейти к решению поставленной задачи, сделаем некоторые преобразования, упрощающие дальнейшее изложение. Введем вектор-функцию $\hat{\varphi}(y, t)$ с компонентами

$$(4.1) \quad \hat{\varphi}_i(y_i, t) = \frac{1}{\beta_i - \alpha_i} [\varphi_i(y_i, t) - \alpha_i y_i], \quad i = 1, \dots, n_y.$$

Тогда уравнения (2.1) и (2.2) примут вид

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + F\Lambda_1 L^T)x(t) + Bu(t) + F\Lambda_2 \hat{v}(t), \\ z(t) &= Cx(t) + Du(t), \end{aligned}$$

где $\Lambda_1 = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n_y})$, $\Lambda_2 = \text{diag}(\beta_1 - \alpha_1, \dots, \beta_{n_y} - \alpha_{n_y})$, и

$$(4.3) \quad \hat{v} = \hat{\varphi}(y, t), \quad y = L^T x,$$

а функции $\hat{\varphi}_i(y_i, t)$ удовлетворяют ограничениям (2.3) при $\alpha_i = 0$, $\beta_i = 1$, $i = 1, \dots, n_y$, т.е. принадлежат сектору $[0, 1]$.

Покажем, что функция Ляпунова, обеспечивающая абсолютную устойчивость системы Лурье с гарантированной оценкой квадратичного функционала, может быть найдена при решении соответствующей задачи о наилучшем

возмущении в линейной системе (см. [11]). А именно, для заданной системы Лурье

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= \mathcal{A}x(t) + \mathcal{F}v(t), \\ z(t) &= Cx(t), \end{aligned}$$

$$(4.5) \quad v(t) = \varphi(y(t), t), \quad y(t) = L^T x(t),$$

с устойчивой матрицей \mathcal{A} и принадлежащими сектору $[0, 1]$ компонентами вектор-функции $\varphi(y, t)$ имеет место следующее утверждение.

Лемма 4.1. Пусть для функции $V(x) = x^T Y x$ с $0 < Y = Y^T < \gamma^2 R^{-1}$ по траектории линейной дискретной или непрерывной системы (4.4) для всех x, v ($|x|^2 + |v|^2 \neq 0$) выполняется соответствующее неравенство

$$(4.6) \quad \Delta V + |z|^2 - v^T \Gamma^{-1}(v - L^T x) < 0, \quad \dot{V} + |z|^2 - v^T \Gamma^{-1}(v - L^T x) < 0,$$

где $\Gamma = \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_{n_y}) > 0$. Тогда функция $V(x)$ обеспечивает абсолютную устойчивость системы Лурье (4.4), (4.5) и при этом $\|z\|^2 < \gamma^2 x_0^T R^{-1} x_0$.

Замечание 1. Заменяя переменные $\hat{v} = \Gamma^{-1/2}(v - \frac{1}{2}L^T x)$ и выбирая целевой выход $\hat{z} = \text{col}(C, \frac{1}{2}\Gamma^{-1/2}L^T)x$, получим, что уравнения (4.4) переходят в уравнения

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= \left(\mathcal{A} + \frac{1}{2}\mathcal{F}L^T \right) x(t) + \mathcal{F}\Gamma^{1/2}\hat{v}(t), \\ \hat{z}(t) &= \begin{pmatrix} C \\ \frac{1}{2}\Gamma^{-1/2}L^T \end{pmatrix} x(t), \end{aligned}$$

в которых $\mathcal{A} + \frac{1}{2}\mathcal{F}L^T$ – гурвицева матрица, а неравенство (4.6) превратится в $\dot{V} + |\hat{z}|^2 - |\hat{v}|^2 < 0$. Последнее неравенство с учетом того, что $Y < \gamma^2 R^{-1}$, эквивалентно условию

$$\sup_{x_0, \hat{v}} \frac{\|\hat{z}\|^2}{x_0^T \gamma^2 R^{-1} x_0 + \|\hat{v}\|^2} < 1,$$

означающему, что обобщенная H_∞ -норма с весовой матрицей $\gamma^{-2}R$ системы (4.7) от входа \hat{v} к выходу \hat{z} меньше 1. Нетрудно видеть, что в случае одной нелинейности при $z \equiv 0$ полученное частотное условие $\|H\|_\infty < 1$ эквивалентно круговому критерию абсолютной устойчивости [12].

Следующее вспомогательное утверждение позволяет характеризовать обобщенную H_∞ -норму линейной устойчивой системы

$$(4.8) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= \mathcal{A}x(t) + \mathcal{B}v(t), \\ z(t) &= \mathcal{C}x(t) \end{aligned}$$

в терминах двойственной системы.

Лемма 4.2 [3]. Обобщенная H_∞ -норма с весовой матрицей $\mathcal{R} > 0$ системы (4.8) меньше 1 тогда и только тогда, когда существует положительно определенная квадратичная форма $V_d(x_d) = x_d^T P x_d$ с $P > \mathcal{R}$, для которой по траектории двойственной системы

$$(4.9) \quad \begin{aligned} \dot{x}_d(t) &= \mathcal{A}^T x_d(t) + \mathcal{C}^T v_d(t), \\ z_d(t) &= \mathcal{B}^T x_d(t) \end{aligned}$$

при всех x_d, v_d ($|x_d|^2 + |v_d|^2 \neq 0$) выполняется соответствующее неравенство

$$(4.10) \quad \Delta V_d + |z_d|^2 - |v_d|^2 < 0, \quad \dot{V}_d + |z_d|^2 - |v_d|^2 < 0.$$

Замечание 2. Матрицы квадратичных форм $V(x) = x^T Y x$ и $V_d(x_d) = x_d^T P x_d$ прямой и двойственной систем связаны соотношением $P = Y^{-1}$.

Резюмируя приведенные выше вспомогательные утверждения и замечания, приходим к следующему результату.

Теорема 4.1. Система Лурье (2.1)–(2.3) с заданными матрицами A, B и F , замкнутая обратной связью $u = \Theta x$, абсолютно устойчива и функционал (2.4) ограничен заданной константой γ^2 , если обобщенная H_∞ -норма с весовой матрицей $\gamma^{-2}R$ от входа v к выходу z линейной системы

$$(4.11) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + B\Theta + F\Lambda L^T)x(t) + F\Lambda_2\Gamma^{1/2}v(t), \\ z(t) &= \begin{pmatrix} C + D\Theta \\ \frac{1}{2}\Gamma^{-1/2}L^T \end{pmatrix} x(t), \end{aligned}$$

где $\Lambda = \Lambda_1 + \frac{1}{2}\Lambda_2$, меньше 1.

Следствие 4.1. С учетом леммы 4.2 можно утверждать, что замкнутая система Лурье (2.1)–(2.3) будет абсолютно устойчивой и выполняется ограничение (2.4), если существует функция $V(x_d) = x_d^T P x_d$ с $P = P^T > \gamma^{-2}R$, для которой по траектории линейной системы

$$(4.12) \quad \begin{aligned} \dot{x}_d(t) &= (A + B\Theta + F\Lambda L^T)^T x_d(t) + \begin{pmatrix} C + D\Theta \\ \frac{1}{2}\Gamma^{-1/2}L^T \end{pmatrix}^T v_d(t), \\ z_d(t) &= \Gamma^{1/2}\Lambda_2 F^T x_d(t) \end{aligned}$$

выполняется неравенство (4.10).

Следствие 4.2. Записывая неравенство (4.10) для системы (4.12) в виде линейного матричного неравенства, получим, что система (2.1)–(2.3) с заданными матрицами A, B и F будет абсолютно устойчивой и выполняется ограничение (2.4) при законе управления $u = \Theta x$, где $\Theta = QP^{-1}$,

а $P = P^T > 0$, Q , $\Gamma = \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_{n_y}) > 0$ и $\gamma^2 > 0$ удовлетворяют следующим линейным матричным неравенствам в дискретном случае:

$$(4.13) \quad \begin{pmatrix} -P & * & * & * \\ AP + BQ + F\Lambda L^T P & -P + F\Lambda_2\Gamma\Lambda_2 F^T & * & * \\ CP + DQ & 0 & -I & * \\ \frac{1}{2}L^T P & 0 & 0 & -\Gamma \end{pmatrix} < 0,$$

$$\begin{pmatrix} P & * \\ I & \gamma^2 R^{-1} \end{pmatrix} > 0$$

и в непрерывном случае:

$$(4.14) \quad \begin{pmatrix} AP + PA^T + BQ + Q^T B^T + F\Lambda L^T P + PL\Lambda F^T + F\Lambda_2\Gamma\Lambda_2 F^T & * & * \\ CP + DQ & -I & * \\ \frac{1}{2}L^T P & 0 & -\Gamma \end{pmatrix} < 0,$$

$$\begin{pmatrix} P & * \\ I & \gamma^2 R^{-1} \end{pmatrix} > 0.$$

5. Синтез оптимальных абсолютно стабилизирующих законов управления

Представим уравнения замкнутой неизвестной системы (2.1)–(2.3) в виде

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \partial x(t) &= (A + B\Theta + F\Lambda_1 L^T)x(t) + F\Lambda_2 \hat{v}(t), \\ z(t) &= (C + D\Theta)x(t), \end{aligned}$$

$$(5.2) \quad \hat{v} = \hat{\varphi}(y, t), \quad y = L^T x,$$

где компоненты вектор-функции $\hat{\varphi}(y, t)$ определяются, как в (4.1), и принадлежат сектору $[0, 1]$. В следующей теореме параметры линейных обратных связей, которые обеспечивают абсолютную устойчивость неизвестной нелинейной системы Лурье и гарантированное значение функционала, выражаются в терминах экспериментальных и априорных данных.

Теорема 5.1. Система Лурье (2.1)–(2.3) с обратной связью $u = \Theta x$ абсолютно устойчива и функционал (3.16) ограничен $J(\Theta) < \gamma^2$, если $\Theta = QP^{-1}$, где $P = P^T > 0$, Q , $\Gamma = \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_{n_y}) > 0$, $\gamma^2 > 0$, $\mu_1 \geq 0$ и $\mu_2 \geq 0$ удовлетворяют следующим линейным матричным неравенствам в

дискретном случае:

$$(5.3) \quad \left(\begin{array}{cccc} -P & * & * & * \\ \left(\begin{array}{c} P \\ Q \\ \Lambda L^T P \end{array} \right) & \widehat{\Lambda}_2 \Gamma \widehat{\Lambda}_2^T - \sum_{k=1}^2 \mu_k \Psi_{11}^{(k)} & * & * \\ 0 & -\sum_{k=1}^2 \mu_k \Psi_{21}^{(k)} & -P - \sum_{k=1}^2 \mu_k \Psi_{22}^{(k)} & * \\ \left(\begin{array}{ccc} C & D & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} I \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} P \\ Q \\ L^T P \end{array} \right) & 0 & 0 & - \left(\begin{array}{c} I \ * \\ 0 \ \Gamma \end{array} \right) \end{array} \right) < 0,$$

$$\left(\begin{array}{cc} P & * \\ I & \gamma^2 R^{-1} \end{array} \right) > 0$$

и в непрерывном случае:

$$(5.4) \quad \left(\begin{array}{ccc} \widehat{\Lambda}_2 \Gamma \widehat{\Lambda}_2^T - \sum_{k=1}^2 \mu_k \Psi_{11}^{(k)} & * & * \\ \left(\begin{array}{c} P \\ Q \\ \Lambda L^T P \end{array} \right)^T - \sum_{k=1}^2 \mu_k \Psi_{21}^{(k)} & - \sum_{k=1}^2 \mu_k \Psi_{22}^{(k)} & * \\ 0 & \left(\begin{array}{ccc} C & D & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} I \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} P \\ Q \\ L^T P \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} I \ * \\ 0 \ \Gamma \end{array} \right) \end{array} \right) < 0,$$

$$\left(\begin{array}{cc} P & * \\ I & \gamma^2 R^{-1} \end{array} \right) > 0,$$

в которых $\widehat{\Lambda}_2 = \text{col}(0, 0, \Lambda_2)$, а $\Psi_{ij}^{(k)}$ – соответствующие блоки матриц $\Psi^{(1)}$ и $\Psi^{(2)}$, заданные в (3.7) и (3.15).

Доказательство теоремы 5.1. Согласно теореме 4.1 система (5.1), (5.2) будет абсолютно устойчивой и $J(\Theta) < \gamma^2$, если обобщенная H_∞ -норма с весовой матрицей $\gamma^{-2}R$ от входа v к выходу z линейной системы (4.11) меньше 1. В свою очередь, это условие выполняется по лемме 4.2 тогда и только тогда, когда обобщенная H_∞ -норма двойственной системы (4.12) меньше 1. Учитывая введенные обозначения, представим уравнения (4.12) в виде

$$(5.5) \quad \partial x_d(t) = \left(\begin{array}{c} I \\ \Theta \\ \Lambda L^T \end{array} \right)^T \left[\Delta^T x_d(t) + \left(\begin{array}{cc} C^T & 0 \\ D^T & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \Lambda^{-1} \Gamma^{-1/2} \end{array} \right) v_d(t) \right],$$

$$z_d(t) = \Gamma^{1/2} \widehat{\Lambda}_2^T \Delta^T x_d(t).$$

Рассмотрим систему, которую назовем расширенной, с дополнительными искусственными входом $w_\Delta(t) \in L_2$ и выходом $z_\Delta(t)$, определяемую уравнениями

$$(5.6) \quad \begin{aligned} \dot{x}_a(t) &= \begin{pmatrix} I \\ \Theta \\ \Lambda L^T \end{pmatrix}^T \left[w_\Delta(t) + \begin{pmatrix} C^T & 0 \\ D^T & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\Lambda^{-1}\Gamma^{-1/2} \end{pmatrix} v_a(t) \right], \\ z_a(t) &= \Gamma^{1/2} \widehat{\Lambda}_2^T w_\Delta(t), \quad z_\Delta(t) = x_a(t). \end{aligned}$$

Заметим, что при $w_\Delta(t) = \Delta^T z_\Delta(t)$ уравнения (5.6) совпадают с уравнениями (5.5). Допустим, что дополнительные входной и выходной сигналы в системе (5.6) при всех $t \geq 0$ удовлетворяют двум неравенствам

$$(5.7) \quad \begin{pmatrix} w_\Delta(t) \\ z_\Delta(t) \end{pmatrix}^T \Psi^{(1)} \begin{pmatrix} w_\Delta(t) \\ z_\Delta(t) \end{pmatrix} \leq 0, \quad \begin{pmatrix} w_\Delta(t) \\ z_\Delta(t) \end{pmatrix}^T \Psi^{(2)} \begin{pmatrix} w_\Delta(t) \\ z_\Delta(t) \end{pmatrix} \leq 0,$$

где матрицы $\Psi^{(1)}$ и $\Psi^{(2)}$ заданы в (3.7) и (3.15). Множество всех таких сигналов $w_\Delta(t)$ обозначим через \mathbf{W}_Δ . При $w_\Delta(t) = \Delta^T z_\Delta(t)$ для всех $\Delta \in \mathbf{\Delta}$, как следует из (3.6) и (3.14), выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} w_\Delta(t) \\ z_\Delta(t) \end{pmatrix}^T \Psi^{(1)} \begin{pmatrix} w_\Delta(t) \\ z_\Delta(t) \end{pmatrix} &= z_\Delta^T(t) \begin{pmatrix} \Delta^T \\ I \end{pmatrix}^T \Psi^{(1)} \begin{pmatrix} \Delta^T \\ I \end{pmatrix} z_\Delta(t) \leq 0, \\ \begin{pmatrix} w_\Delta(t) \\ z_\Delta(t) \end{pmatrix}^T \Psi^{(2)} \begin{pmatrix} w_\Delta(t) \\ z_\Delta(t) \end{pmatrix} &= z_\Delta^T(t) \begin{pmatrix} \Delta^T \\ I \end{pmatrix}^T \Psi^{(2)} \begin{pmatrix} \Delta^T \\ I \end{pmatrix} z_\Delta(t) \leq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, $w_\Delta(t) = \Delta^T z_\Delta(t) \in \mathbf{W}_\Delta$ и, следовательно, система (5.5) при $\Delta \in \mathbf{\Delta}$ “погружена” в расширенную систему (5.6), (5.7).

Приведем далее доказательство только для непрерывного случая, так как в дискретном случае оно аналогично. Выясним условия, при которых существует положительно определенная квадратичная функция $V(x_a) = x_a^T P x_a$ с $P > \gamma^{-2} R$, для которой в силу уравнений расширенной системы (5.6) при всех $w_\Delta(t)$, удовлетворяющих неравенствам (5.7), при всех x_a, v_a ($|x_a|^2 + |v_a|^2 \neq 0$) выполняется неравенство

$$(5.8) \quad \dot{V} + |z_a|^2 - |v_a|^2 < 0.$$

Достаточным условием для этого в силу S -процедуры является существование функции $V(x_a) = x_a^T P x_a$ с $P > \gamma^{-2} R$, для которой в силу уравнений (5.6) при всех x_a, v_a, w_Δ , одновременно не обращающихся в ноль, и некоторых $\mu_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0$ выполняется неравенство

$$(5.9) \quad \dot{V} + |z_a|^2 - |v_a|^2 - \sum_{k=1}^2 \mu_k \begin{pmatrix} w_\Delta \\ z_\Delta \end{pmatrix}^T \Psi^{(k)} \begin{pmatrix} w_\Delta \\ z_\Delta \end{pmatrix} < 0.$$

но, с одной стороны, когда априорная информация достаточно грубая, т.е. радиус ρ матричной сферы в (3.13) достаточно велик и соответственно γ_a принимает большое значение, то γ_* может оказаться малой, если помехи в измерениях не очень большие, т.е. небольшим является матричный эллипсоид Δ_p . С другой стороны, если помехи в измерениях оказываются достаточно большими и соответственно большой является γ_p или, более того, если информационная матрица является вырожденной, а матричный эллипсоид Δ_p оказывается неограниченным, то γ_* может тем не менее стать малой за счет малости радиуса матричной сферы при использовании априорной информации. Эти выводы будут подтверждены результатами математического моделирования в разделе 6.

6. Иллюстративный пример: нелинейный осциллятор

Приведем результаты построения абсолютно стабилизирующего закона управления для дискретной модели

$$x(t+1) = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 - \delta h \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ -h\omega^2 \end{pmatrix} \varphi(y(t)) + \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} w(t),$$

$$y(t) = (1 \ 0)x(t), \quad z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0,1 \end{pmatrix} u$$

нелинейной системы

$$\ddot{\psi} + \delta\dot{\psi} + \omega^2\varphi(\psi) = u + w,$$

где $x = \text{col}(\psi, \dot{\psi})$ и нелинейность $\varphi(\psi)$ удовлетворяет условию (2.3) при $\alpha = -2/3\pi$, $\beta = 1$. При реализации рассматриваемого синтеза управления для непрерывной системы требуется вычислять производные, что влечет появление дополнительного возмущения, границы которого трудно оценить заранее. В этом смысле дискретный вариант является более предпочтительным. В эксперименте предполагалось, что реальный объект – это нелинейный осциллятор, для которого $\varphi(\psi) = \sin \psi$, коэффициент демпфирования $\delta = 0,1$ и частота $\omega^2 = 1$, а для номинального объекта $\delta_* = 0$, $\omega_*^2 = 0,8$. Были выбраны шаг $h = 0,2$, весовая матрица $R = 0,1I$ и радиус априорной неопределенности $\rho = 0,05$. Для каждого значения уровня возмущения d проводилось десять измерений, т.е. $N = 10$. В эксперименте начальные условия и управление случайны в интервале $[-1, 1]$, возмущение $w(t)$ случайно в интервале $[-d, d]$. Неравенства (5.3) решались с использованием пакета CVX, в котором для решения строгих неравенств следует “слегка отступить от нуля”.

На рисунках показаны результаты, полученные усреднением по 20 независимым экспериментам. Из рис. 2 можно сделать следующие выводы. С увеличением уровня возмущения гарантированное значение функционала γ_* , получаемое на основе экспериментальных и априорных данных, возрастает, оставаясь при этом значительно меньше (при относительно малых уровнях возмущения) гарантированного значения функционала γ_a , полученного только по

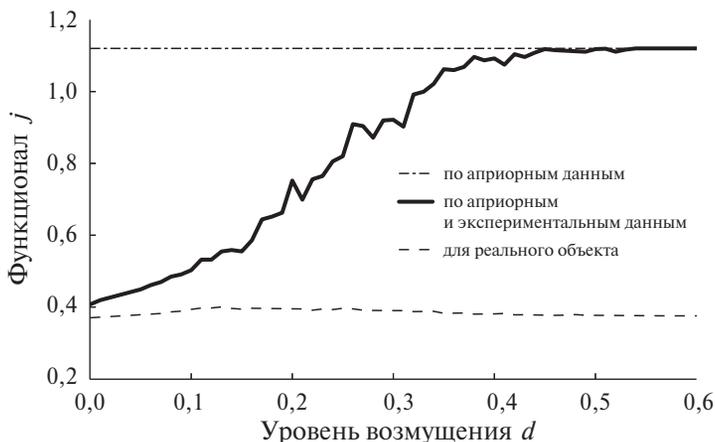


Рис. 2. Гарантированные значения функционала при робастном управлении на основе экспериментальных и априорных данных и значения функционала при этом управлении для реального объекта как функции уровня возмущения.

априорной информации. Это объясняется тем, что с ростом уровня возмущения расширяется множество объектов Δ_p , согласованных с экспериментальными данными. Начиная с некоторого уровня возмущения (в данном случае примерно с $d = 0,5$) множество Δ_p включает в себя множество объектов Δ_a , выделяемых на основе априорной информации, и, следовательно, при дальнейшем росте уровня возмущения рост γ_* прекращается и $\gamma_* = \gamma_a$. Пунктирная кривая на рис. 2 соответствует значениям функционала для реального объекта (если бы он был известен) при полученном робастном управлении на основе экспериментальных и априорных данных при различных уровнях возмущения. Как следует из экспериментов, это значение слабо зависит от уровня возмущения и достаточно близко к оптимальному значению для известного объекта, т.е. $\gamma^2 \approx 0,39$.

Оптимальное управление и соответствующее значение функционала для реального объекта (если бы он был известен), вычисленные с помощью решения линейных матричных неравенств (4.13), следующие:

$$u = -6,58x_1 - 4,59x_2, \quad \gamma^2 = 0,36.$$

Робастное управление и соответствующее значение функционала, вычисленные на основе только априорной информации с помощью линейных матричных неравенств (5.3) при $\mu_1 = 0$, следующие:

$$u = -6,45x_1 - 5,38x_2, \quad \gamma_a^2 = 1,12.$$

Робастное управление и соответствующее значение функционала, вычисленные по априорным и экспериментальным данным в одном из экспериментов при уровне возмущения $d = 0,1$ с помощью линейных матричных неравенств (5.3) при $\mu_1 \geq 0$ и $\mu_2 \geq 0$, следующие:

$$u = -9,35x_1 - 6,61x_2, \quad \gamma_*^2 = 0,52.$$

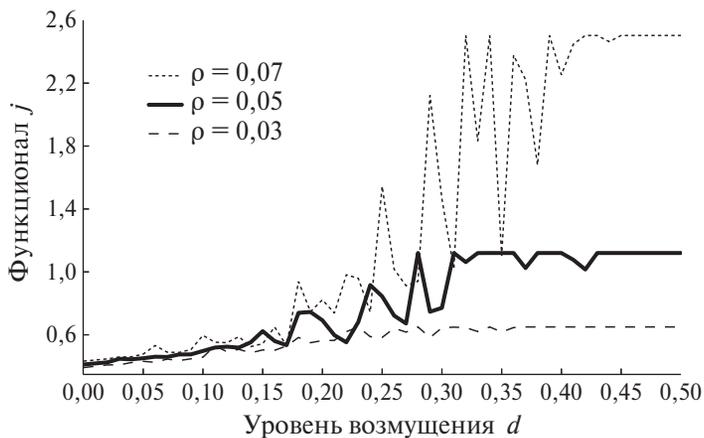


Рис. 3. Гарантированные значения функционала при робастном управлении на основе экспериментальных и априорных данных при различных радиусах матричных сфер в априорной информации как функции уровня возмущения.

Заметим, как показал эксперимент, если робастное управление строится только на основе экспериментальных данных без учета априорной информации, т.е. вычисляется с помощью линейных матричных неравенств (5.3) при $\mu_2 = 0$, то уже при сравнительно малых уровнях возмущения наблюдаются очень большие гарантированные значения функционала. Это объясняется тем, что даже при малых случайных возмущениях эллипсоид Δ_p может оказаться достаточно большим или даже вырожденным, т.е. неограниченным. Таким образом, учет априорной информации оказывает регуляризирующее влияние на синтез робастного управления по экспериментальным данным, причем даже в том случае, когда единого робастного регулятора на всем множестве объектов Δ_a , выделяемых по априорной информации, не существует.

На рис. 3 видно, как увеличение радиуса матричной сферы в априорной информации влияет на гарантированное значение функционала при робастном управлении, построенном на основе априорных и экспериментальных данных.

7. Заключение

В статье разработан метод синтеза абсолютно стабилизирующего управления для неизвестных систем Лурье, которое обеспечивает гарантированное значение интегрального квадратичного функционала, характеризующего переходной процесс в замкнутой системе при неопределенных начальных условиях. К экспериментальным данным не предъявляются требования исключающего возбуждения в системе, необходимые для идентифицируемости системы. Полученные линейные матричные неравенства для вычисления параметров обратной связи позволяют, в частности, находить законы управления

на основе только априорных, только экспериментальных и совместно тех и других данных. Результаты экспериментов с нелинейным осциллятором подтверждают преимущество законов управления, синтезируемых с использованием экспериментальных и априорных данных, над законами управления, получаемыми на основе только экспериментальных или только априорных данных.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 3.1. Запишем неравенство (3.5) в виде

$$\Delta \widehat{X} \widehat{X}^T \Delta^T - X_+ \widehat{X}^T \Delta^T - \Delta \widehat{X} X_+^T + X_+ X_+^T - \Omega \leq 0$$

и с учетом замены переменных представим его как

$$\widehat{\Delta}^{(1)} \Sigma^2 \widehat{\Delta}^{(1)T} - X_+ \widehat{X}^{(1)T} \widehat{\Delta}^{(1)T} - \widehat{\Delta}^{(1)} \widehat{X}^{(1)} X_+^T + X_+ X_+^T - \Omega \leq 0.$$

Выделяя полный квадрат, получим

$$[\widehat{\Delta}^{(1)} - X_+ \widehat{X}^{(1)T} \Sigma^{-2}] \Sigma^2 [\widehat{\Delta}^{(1)} - X_+ \widehat{X}^{(1)T} \Sigma^{-2}]^T \leq \Gamma,$$

где Γ задана в (3.11). Подставляя сюда выражение для X_+ из (3.9) и учитывая, что $\widehat{X}^{(1)} \widehat{X}^{(1)T} = \Sigma^2$, получим $\Gamma = \Omega + W(\widehat{X}^{(1)T} \Sigma^{-2} \widehat{X}^{(1)} - I)W^T$. С учетом (3.4) отсюда следует, что $\Gamma \geq 0$. Вычисляя градиент по $\widehat{\Delta}^{(1)}$ от матричной нормы невязки, т.е. функции $\text{tr}(X_+ - \widehat{\Delta}^{(1)} \widehat{X}^{(1)})^T (X_+ - \widehat{\Delta}^{(1)} \widehat{X}^{(1)})$, и приравнявая его к нулю $-2X_+ \widehat{X}^{(1)T} + 2\widehat{\Delta}^{(1)} \widehat{X}^{(1)} \widehat{X}^{(1)T} = 0$, выразим оценку $\Delta_{LS}^{(1)}$ методом наименьших квадратов неизвестной матрицы $\Delta_{real}^{(1)}$ в (3.9) как $\widehat{\Delta}_{LS}^{(1)} = X_+ \widehat{X}^{(1)T} \Sigma^{-2}$.

Доказательство леммы 4.1. Полагая в (4.6) $v = \varphi(y, t)$ и учитывая, что $\varphi_i(y_i, t)[\varphi_i(y_i, t) - y_i] \leq 0$, получим, что по траектории системы (4.4), (4.5) выполняется соответствующее неравенство $\Delta V + |z|^2 < 0$ или $\dot{V} + |z|^2 < 0$ и, следовательно, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$. Суммируя или интегрируя и учитывая, что $Y < \gamma^2 R^{-1}$, получим $\|z\|^2 < \gamma^2 x_0^T R^{-1} x_0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лурье А. И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. М.: Гостехиздат, 1951.
2. Коган М.М., Степанов А.В. Синтез субоптимальных робастных регуляторов на основе априорных и экспериментальных данных // АиТ. 2023. № 8. С. 24–42.
3. Коган М.М., Степанов А.В. Синтез обобщенного H_∞ -субоптимальных управления по экспериментальным и априорным данным // АиТ. 2024. № 1. С. 3–20.
4. Коган М.М., Степанов А.В. Как улучшить робастное управление линейной нестационарной системой с помощью экспериментальных данных // АиТ. 2024. № 6. С. 115–139.

5. *Petersen I.R., Tempo R.* Robust Control of Uncertain Systems: Classical Results and Recent Developments // *Automatica*. 2014. V. 50. No. 5. P. 1315–1335.
6. *De Persis C., Tesi P.* Formulas for Data-Driven Control: Stabilization, Optimality and Robustness // *IEEE Trans. Automat. Control*. 2020. V. 65. No. 3. P. 909–924.
7. *Waarde H. J., Eising J., Trentelman H.L., Camlibel M.K.* Data Informativity: a New Perspective on Data-Driven Analysis and Control // *IEEE Trans. Automat. Control*. 2020. V. 65. No. 11. P. 4753–4768.
8. *Berberich J., Scherer C.W., Allgower F.* Combining Prior Knowledge and Data for Robust Controller Design // *IEEE Trans. Automat. Control*. 2023. V. 68. No. 8. P. 4618–4633.
9. *Luppi A., De Persis C., Tesi P.* On data-driven stabilization of systems with quadratic nonlinearities // arXiv: 2103.15631v1 [eess.SY] 29 Mar 2021.
10. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989.
11. *Коган М.М.* Минимаксный подход к синтезу абсолютно стабилизирующих регуляторов для нелинейных систем Лурье // *АиТ*. 1999. № 5. С. 78–90.
12. *Геллиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978.
13. *Polyak B.T.* Convexity of Quadratic Transformations and Its Use in Control and Optimization // *J. Optim. Theory Appl.* 1998. V. 99. No. 3. P. 553–583.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Н.В. Кузнецовым.

Поступила в редакцию 18.01.2024

После доработки 20.08.2024

Принята к публикации 26.11.2024