Автоматика и телемеханика, № 2, 2025

Нелинейные системы

© 2025 г. **М.В. КУКОВЕРОВ** (gedevan_space@mail.ru)
(Публичное акционерное общество
“Московская объединенная энергетическая компания”)

К ВЫЧИСЛЕНИЮ РАЗМЕРА ГРАНИЦЫ ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ШУРУ

Рассматривается подмножество области устойчивости по Шуру, а именно область параметров, при которых корни полинома степени n по модулю не превышают единицы и являются вещественными числами. Проведена оценка площади гиперповерхности рассмотренной многомерной области в зависимости от количества измерений n. Максимальное значение площади достигается при $n = 3$.

Ключевые слова: многомерные интегралы, область устойчивости по Шуру, авторегрессия, стационарные авторегрессионные процессы, пограничные процессы.

DOI: 10.31857/S0005231025020024, **EDN:** IRBDBH

1. Введение

Ряд современных исследований посвящен изучению области устойчивости по Шуру полиномов степени n в пространстве параметров, а также изучению ее границы [1]. При этом вопрос определения размера границы этой области, т.е. площади ее гиперповерхности, остается открытым.

Будем рассматривать полиномы вида

$$x^n - \alpha_1 x^{n-1} - \ldots - \alpha_{n-1} x - \alpha_n = 0, \tag{1}$$

где параметры $\alpha_i \in R,\ i = 1, \ldots, n$.

Каждому полиному соответствует точка $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ в n-мерном евклидовом пространстве параметров R^n.

Область устойчивости по Шуру – это область параметров в R^n, при которых все корни полиномов находятся внутри единичного круга на комплексной плоскости. Указанную область обозначим через D_n, как в [2]. В указанной работе представлена формула для расчета объема $V(D_n)$ области D_n.

Область параметров внутри D_n, т.е. подмножество в D_n, при которых все корни полиномов являются вещественными, обозначим через $\mathcal{E}_n$, как в [3]. В этой работе с использованием многомерных интегралов Селберга найдена формула для расчета объема $V(\mathcal{E}_n)$ области $\mathcal{E}_n$.

Размеры областей устойчивости полиномов [2, 3]

n	$V(D_n)$	$V(\mathcal{E}_n)$	$V(D_n \backslash \mathcal{E}_n)$	$\dfrac{V(\mathcal{E}_n)}{V(D_n)}$	$\dfrac{V(D_n \backslash \mathcal{E}_n)}{V(D_n)}$
«1»	«2»	«3»	«4»	«5»	«6»
1	2	2	0	1	0
2	4	1,333	2,667	0,3333	0,6667
3	5,333	0,355	4,978	0,0667	0,9333
4	7,111	0,041	7,070	0,0057	0,9943
5	$7,585$	$0,002$	$7,583$	$0,0003$	$0,9997$

Величины $V(D_n)$ и $V(\mathcal{E}_n)$ достигают максимума при $n = 6$ и $n = 1$ и являются бесконечно малыми величинами при $n \to \infty$.[1]

Граница ∂D_n области D_n состоит из двух гиперплоскостей и одной гиперповерхности [1, 4]. Гиперплоскости соответствуют корням -1 и 1.

Граница $\partial\mathcal{E}_n$ области $\mathcal{E}_n$ состоит из двух гиперплоскостей, которые соответствуют гиперплоскостям поверхности области D_n, и одной гиперповерхности, которая находится внутри области D_n.

В данной работе представлены результаты вычисления размеров $S(\partial\mathcal{E}_n)$ границ $\partial\mathcal{E}_n$ области $\mathcal{E}_n$.

2. Вычисление $S(\partial\mathcal{E}_2)$

Рассмотрим полином степени 2:

$$x^2 - \alpha_1 x - \alpha_2 = 0. \tag{2}$$

Областью D_2 является множество параметров:

$$\begin{cases} -2 < \alpha_1 < 2, \\ -1 < \alpha_2 < 1 - |\alpha_1|. \end{cases}$$

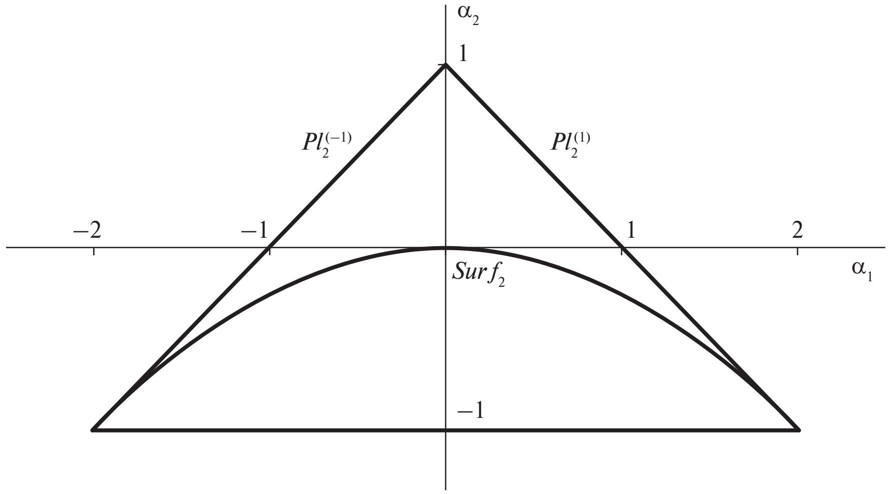
Областью $\mathcal{E}_2$ является множество параметров:

$$\begin{cases} -2 < \alpha_1 < 2, \\ -\alpha_1^2/4 < \alpha_2 < 1 - |\alpha_1|. \end{cases}$$

С эконометрической точки зрения на рисунке изображены области стационарности, параметры из которых соответствуют стационарным авторегрессионным процессам 2-го порядка, а внешняя граница соответствует пограничным процессам.

Граница $\partial\mathcal{E}_2$ состоит из участка параболы $Surf_2$ и двух отрезков $Pl_2^{(1)}$ и $Pl_2^{(-1)}$, которые соответствуют корням 1 и -1. То есть полином (2) с па-

[1] Несмотря на то, что сравнение несоизмеримых по размерности величин, таких как длина, площадь, объем и пр., может вызывать неопределенность, тем не менее в ряде случаев это может вызывать интерес. См., например, исследование данного вопроса для сферы и шара:
https://mathworld.wolfram.com/Hypersphere.html
https://mathworld.wolfram.com/Ball.html



Области D_2 и $\mathcal{E}_2$. Источник: [5].

раметрами из участка $Pl_2^{(1)}$ будет иметь корень, равный 1, а полином (2) с параметрами из участка $Pl_2^{(-1)}$ будет иметь корень, равный -1.

Длину границы $S(\partial\mathcal{E}_2)$ можно вычислить как сумму длин указанных участков:

$$S(\partial\mathcal{E}_2) = S(Pl_2^{(1)}) + S(Pl_2^{(-1)}) + S(Surf_2) \approx 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 4{,}591 \approx 10{,}248.$$

3. Вычисление $S(\partial\mathcal{E}_3)$

Рассмотрим полином степени 3:

$$x^3 - \alpha_1 x^2 - \alpha_2 x - \alpha_3 = 0. \tag{3}$$

В [6] показано, что областью D_3 является множество параметров:

$$\begin{cases} -1 < \alpha_3 < 1, \\ -3 < \alpha_1 < 3, \\ \alpha_2 < 1 - |\alpha_1 + \alpha_3|, \\ \alpha_2 > -1 + \alpha_3^2 - \alpha_1\alpha_3. \end{cases}$$

Областью $\mathcal{E}_3$ является множество параметров:

$$\begin{cases} -1 < \alpha_3 < 1, \\ -3 < \alpha_1 < 3, \\ \alpha_2 < 1 - |\alpha_1 + \alpha_3|, \\ \alpha_1^2\alpha_2^2 + 4\alpha_2^3 - 4\alpha_1^3\alpha_3 - 27\alpha_3^2 - 18\alpha_1\alpha_2\alpha_3 > 0. \end{cases}$$

Граница $\partial\mathcal{E}_3$ состоит из поверхности $Surf_3$ и участков плоскостей $Pl_3^{(1)}$ и $Pl_3^{(-1)}$, которые соответствуют корням 1 и -1. То есть полином (3) с параметрами из участка $Pl_3^{(1)}$ будет иметь корень, равный 1, а полином (3) с параметрами из участка $Pl_3^{(-1)}$ будет иметь корень, равный -1. Используя формулы Виета, указанные поверхности можно представить в параметрическом виде.

Параметрический вид $Pl_3^{(1)}$:

$$\begin{cases} \alpha_1 = 1 + x_2 + x_3, \\ \alpha_2 = -x_2 - x_3 - x_2x_3, \\ \alpha_3 = x_2x_3, \end{cases}$$

где корни полинома (3) $x_1 = 1$, $x_2 \in [-1, 1]$, $x_3 \in [-1, x_2]$.

Параметрический вид $Pl_3^{(-1)}$:

$$\begin{cases} \alpha_1 = -1 + x_2 + x_3, \\ \alpha_2 = x_2 + x_3 - x_2x_3, \\ \alpha_3 = -x_2x_3, \end{cases}$$

где корни полинома (3) $x_1 = -1$, $x_2 \in [-1, 1]$, $x_3 \in [-1, x_2]$.

Параметрический вид $Surf_3$:

$$\begin{cases} \alpha_1 = 2t + x_3, \\ \alpha_2 = -t^2 - 2tx_3, \\ \alpha_3 = t^2x_3, \end{cases} \tag{4}$$

где корни полинома (3) $x_1 = x_2 = t$, $t \in [-1, 1]$, $x_3 \in [-1, 1]$.

Площадь границы $S(\partial\mathcal{E}_3)$ можно вычислить как сумму площадей указанных поверхностей:

$$\begin{gathered} S(\partial\mathcal{E}_3) = S(Pl_3^{(1)}) + S(Pl_3^{(-1)}) + S(Surf_3) \approx \\ \approx \sqrt{3} \times \frac{4}{3} + \sqrt{3} \times \frac{4}{3} + 6{,}759 \approx 11{,}378. \end{gathered} \tag{5}$$

4. Вычисление $S(\partial\mathcal{E}_n)$

Рассмотрим полином степени n вида (1).

Граница $\partial\mathcal{E}_n$ области $\mathcal{E}_n$ состоит из гиперповерхности $Surf_n$ и участков гиперплоскостей $Pl_n^{(1)}$ и $Pl_n^{(-1)}$, которые соответствуют корням 1 и -1, т.е. полином (1) с параметрами из участка $Pl_n^{(1)}$ будет иметь корень, равный 1, а полином (1) с параметрами из участка $Pl_n^{(-1)}$ будет иметь корень, равный -1.

Утверждения о размерах участков гиперплоскостей $Pl_n^{(1)}$ и $Pl_n^{(-1)}$ и гиперповерхности $Surf_n$ сформулируем в виде теорем.

Т е о р е м а 1. *Площади участков гиперплоскостей $Pl_n^{(1)}$ и $Pl_n^{(-1)}$, $n \geqslant 2$, можно представить в виде*

$$S(Pl_n^{(1)}) = S(Pl_n^{(-1)}) = \sqrt{n} \times 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{\{(k-1)!\}^2}{(2k-1)!}. \tag{6}$$

Т е о р е м а 2. *Площадь гиперповерхности $Surf_n$, $n \geqslant 3$, можно представить в виде*

$$S(Surf_n) = 2 \underset{\substack{x_1 \in (-1,1) \\ -1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{n-1} \leqslant 1}}{\int \cdots \int} \frac{\sqrt{1-x_1^{2n}}}{\sqrt{1-x_1^2}} \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1} |x_i - x_j| \; dx_1 \ldots dx_{n-1}. \tag{7}$$

В частности, при $n = 3$

$$S(Surf_3) = 2 \iint\limits_{\substack{-1 < x_1 < 1 \\ -1 \leqslant x_2 \leqslant 1}} \frac{\sqrt{1-x_1^6}}{\sqrt{1-x_1^2}} \; |x_1 - x_2| \; dx_1 dx_2 \approx 6{,}759.$$

Размер $S(\partial\mathcal{E}_n)$ границы $\partial\mathcal{E}_n$ можно вычислить, как сумму

$$S(\partial\mathcal{E}_n) = S(Pl_n^{(1)}) + S(Pl_n^{(-1)}) + S(Surf_n). \tag{8}$$

Основной результат статьи представлен в следующей теореме.

Т е о р е м а 3. *Размер $S(\partial\mathcal{E}_n)$ границы $\partial\mathcal{E}_n$ является бесконечно малой величиной при $n \to \infty$. Максимальное значение достигается при $n = 3$.*

5. Заключение

В работе представлены результаты расчетов размеров $S(\partial\mathcal{E}_n)$ границы $\partial\mathcal{E}_n$ области $\mathcal{E}_n$ в n-мерном пространстве параметров полиномов, являющейся подмножеством области устойчивости по Шуру D_n.

Представляется целесообразным дальнейшее изучение вопроса определения размера границы ∂D_n области D_n. Как уже было отмечено, граница ∂D_n области D_n состоит из двух гиперплоскостей, соответствующих корням -1 и 1, и одной гиперповерхности, которая обозначена как $\mathfrak{S}_n$. Вычисление площади $S(\mathfrak{S}_n)$ для произвольного n представляется более сложной задачей, по сравнению с результатом (7) теоремы 2.

Доказательство теоремы 1. Стандартными вычислениями можно проверить, что (6) выполняется для $n = 2, 3$. На основании (6) получаем

$$S(Pl_2^{(1)}) = 2\sqrt{2},$$
$$S(Pl_3^{(1)}) = \sqrt{3}\,\frac{4}{3},$$

что соответствует значениям, вычисленным в разделах 2 и 3.

Докажем (6) для произвольного n.

Участок гиперплоскости $Pl_n^{(1)}$ может быть параметризован так:

$$\text{(П.1)} \qquad \begin{cases} \alpha_1 = 1 + \zeta_1 \\ \alpha_2 = -(\zeta_1 + \zeta_2) \\ \alpha_3 = \zeta_2 + \zeta_3 \\ \ldots \\ \alpha_k = (-1)^{k-1}(\zeta_{k-1} + \zeta_k) \\ \ldots \\ \alpha_{n-2} = (-1)^{n-3}(\zeta_{n-3} + \zeta_{n-2}) \\ \alpha_{n-1} = (-1)^{n-2}(\zeta_{n-2} + \zeta_{n-1}) \\ \alpha_n = (-1)^{n-1}\zeta_{n-1}, \end{cases}$$

где ζ_i, $i = 1, \ldots, n-1$ – это элементарный симметрический многочлен степени i от $(n-1)$ переменных $x_2, \ldots, x_n$, $-1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant 1$.

Параметризация (П.1) получена на основании формул Виета после приравнивания корня $x_1 = 1$. Упорядочивание параметров $x_2, \ldots, x_n$ связано с тем, что параметризация (П.1) симметрична относительно перестановок указанных параметров.

По определению

$$\text{(П.2)} \qquad S(Pl_n^{(1)}) = \underset{-1\leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant 1}{\int \cdots \int} \|H_n\| dx_2 \ldots dx_n,$$

где H_n – определитель:

$$\text{(П.3)} \qquad H_n = \begin{vmatrix} \mathrm{j}_1 & \dfrac{\partial \alpha_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial \alpha_1}{\partial x_3} & \cdots & \dfrac{\partial \alpha_1}{\partial x_n} \\ \mathrm{j}_2 & \dfrac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial \alpha_2}{\partial x_3} & \cdots & \dfrac{\partial \alpha_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{j}_n & \dfrac{\partial \alpha_n}{\partial x_2} & \dfrac{\partial \alpha_n}{\partial x_3} & \cdots & \dfrac{\partial \alpha_n}{\partial x_n} \end{vmatrix},$$

где $\{\mathrm{j}_1, \ldots, \mathrm{j}_n\}$ – ортонормированный базис в пространстве R^n.

Заметим, что для ζ_i в (П.1) выполняется равенство

$$\frac{\partial \zeta_i}{\partial x_r} = \zeta_{i-1}^{(r)},$$

где $\zeta_j^{(r)}$ – это элементарный симметрический многочлен степени j от $n-2$ переменных $x_2, \ldots, x_{r-1}, x_{r+1}, \ldots, x_n$.

Без ограничения общности пусть $n = 2k+1$. Тогда на основании (П.3) и (П.1) получаем, что

$$H_n = \begin{vmatrix} \mathfrak{j}_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \mathfrak{j}_2 & -1-\zeta_1^{(2)} & -1-\zeta_1^{(3)} & \cdots & -1-\zeta_1^{(n)} \\ \mathfrak{j}_3 & \zeta_1^{(2)}+\zeta_2^{(2)} & \zeta_1^{(3)}+\zeta_2^{(3)} & \cdots & \zeta_1^{(n)}+\zeta_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathfrak{j}_{n-1} & -\zeta_{n-3}^{(2)}-\zeta_{n-2}^{(2)} & -\zeta_{n-3}^{(3)}-\zeta_{n-2}^{(3)} & \cdots & -\zeta_{n-3}^{(n)}-\zeta_{n-2}^{(n)} \\ \mathfrak{j}_n & \zeta_{n-2}^{(2)} & \zeta_{n-2}^{(3)} & \cdots & \zeta_{n-2}^{(n)} \end{vmatrix}. \tag{П.4}$$

Рассмотрим $H_n^{(n)}$ – алгебраическое дополнение элемента $\mathfrak{j}_n$ в H_n:

$$H_n^{(n)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1-\zeta_1^{(2)} & -1-\zeta_1^{(3)} & \cdots & -1-\zeta_1^{(n)} \\ \zeta_1^{(2)}+\zeta_2^{(2)} & \zeta_1^{(3)}+\zeta_2^{(3)} & \cdots & \zeta_1^{(n)}+\zeta_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\zeta_{n-3}^{(2)}-\zeta_{n-2}^{(2)} & -\zeta_{n-3}^{(3)}-\zeta_{n-2}^{(3)} & \cdots & -\zeta_{n-3}^{(n)}-\zeta_{n-2}^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Стандартными преобразованиями строк $H_n^{(n)}$ можно привести к виду

$$H_n^{(n)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -\zeta_1^{(2)} & -\zeta_1^{(3)} & \cdots & -\zeta_1^{(n)} \\ \zeta_2^{(2)} & \zeta_2^{(3)} & \cdots & \zeta_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\zeta_{n-2}^{(2)} & -\zeta_{n-2}^{(3)} & \cdots & -\zeta_{n-2}^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Так как рассматривается участок гиперплоскости $Pl_n^{(1)}$ и $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ в (П.1), то $\sum_{i=1}^n \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} = 0$ для всех $j = 2, \ldots, n$.

Из этого следует, что алгебраические дополнения элементов первого столбца в H_n по модулю равны между собой, и для определения модуля их величины достаточно рассмотреть одно из них, например $H_n^{(n)}$.

Тогда на основании (П.2) и [3] получаем

$$S(Pl_n^{(1)}) = \sqrt{n} \int\cdots\int_{-1\leqslant x_2\leqslant\ldots\leqslant x_n\leqslant 1} |H_n^{(n)}| dx_2 \ldots dx_n = \sqrt{n}\, V(\mathcal{E}_{n-1}), \tag{П.5}$$

где $V(\mathcal{E}_{n-1})$ – объем области $\mathcal{E}_{n-1}$.

Для завершения доказательства утверждения теоремы для $Pl_n^{(1)}$ остается учесть результат из [3], что

$$V(\mathcal{E}_n) = 2^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{k=1}^{n} \frac{\{(k-1)!\}^2}{(2k-1)!}.$$

Утверждение теоремы для $Pl_n^{(-1)}$ доказывается аналогично.

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Доказательство проведем по индукции.

Пусть $n = 3$. Поверхность $Surf_3$ параметризована в (4). Найдем ее площадь $S(Surf_3)$.

$$S(Surf_3) = \iint\limits_{\substack{-1\leqslant t\leqslant 1\\ -1\leqslant x_3\leqslant 1}} \sqrt{\left(\frac{D(\alpha_1,\alpha_2)}{D(t,x_3)}\right)^2 + \left(\frac{D(\alpha_1,\alpha_3)}{D(t,x_3)}\right)^2 + \left(\frac{D(\alpha_2,\alpha_3)}{D(t,x_3)}\right)^2}\, dt\, dx_3,$$

где

$$\frac{D(\alpha_1,\alpha_2)}{D(t,x_3)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\alpha_1}{\partial t} & \dfrac{\partial\alpha_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial\alpha_2}{\partial t} & \dfrac{\partial\alpha_2}{\partial x_3} \end{vmatrix} \simeq 2(t-x_3),$$

$$\frac{D(\alpha_1,\alpha_3)}{D(t,x_3)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\alpha_1}{\partial t} & \dfrac{\partial\alpha_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial\alpha_3}{\partial t} & \dfrac{\partial\alpha_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} \simeq 2t(t-x_3),$$

$$\frac{D(\alpha_2,\alpha_3)}{D(t,x_3)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\alpha_2}{\partial t} & \dfrac{\partial\alpha_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial\alpha_3}{\partial t} & \dfrac{\partial\alpha_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} \simeq 2t^2(t-x_3).$$

Знак “$\simeq$” используется в смысле равенства по модулю. Это допустимо, поскольку соответствующие величины в дальнейшем возводятся в квадраты.

Таким образом,

$$S(Surf_3) = \iint\limits_{\substack{-1\leqslant t\leqslant 1\\ -1\leqslant x_3\leqslant 1}} \|A_3\|\, dt\, dx_3, \tag{П.6}$$

где

$$\|A_3\| = 2\sqrt{1+t^2+t^4}\ |t-x_3|. \tag{П.7}$$

Базой индукции является (П.6) для $S(Surf_3)$.

Теперь для произвольного n рассмотрим поверхность $Surf_n$, которая параметризована так:

$$\begin{cases} \alpha_1 = 2t+\sigma_1\\ \alpha_2 = -(t^2+2t\sigma_1+\sigma_2)\\ \alpha_3 = t^2\sigma_1+2t\sigma_2+\sigma_3\\ \dots\\ \alpha_k = (-1)^{k-1}(t^2\sigma_{k-2}+2t\sigma_{k-1}+\sigma_k)\\ \dots\\ \alpha_{n-2} = (-1)^{n-3}(t^2\sigma_{n-4}+2t\sigma_{n-3}+\sigma_{n-2})\\ \alpha_{n-1} = (-1)^{n-2}(t^2\sigma_{n-3}+2t\sigma_{n-2})\\ \alpha_n = (-1)^{n-1}t^2\sigma_{n-2}, \end{cases} \tag{П.8}$$

где σ_i, $i=1,\dots,n-2$, – это элементарный симметрический многочлен степени i от $(n-2)$ переменных $x_3,\dots,x_n$, $t\in[-1,1]$, $-1\leqslant x_3\leqslant\dots\leqslant x_n\leqslant 1$.

Параметризация (П.8) получена на основании формул Виета после приравнивания корней $x_1=x_2=t$. Упорядочивание параметров $x_3,\dots,x_n$ связано с тем, что параметризация (П.8) симметрична относительно перестановок указанных параметров.

Предположим, что утверждение теоремы верно для площади $S(Surf_n)$. То есть предположим, что

$$S(Surf_n) = \int\limits_{\substack{t\in[-1,1]\\ -1\leqslant x_3\leqslant\dots\leqslant x_n\leqslant 1}}\cdots\int \|A_n\| dt\, dx_3\dots dx_n, \tag{П.9}$$

где

$$\|A_n\| = 2\sqrt{1+t^2+\dots+t^{2(n-1)}}\left(\prod_{3\leqslant i\leqslant n}|t-x_i|\right)\left(\prod_{3\leqslant i<j\leqslant n}|x_i-x_j|\right). \tag{П.10}$$

Отдельно можно отметить, что формулировки (П.9) и (7) эквивалентны, но в рамках доказательства теоремы формулировка (П.9) более удобна.

Теперь на основании (П.10) докажем утверждение теоремы для площади $S(Surf_{n+1})$.

Введем обозначение $y = x_{n+1}$. Тогда поверхность $Surf_{n+1}$ параметризуется так:

$$(\text{П}.11)\quad \begin{cases} \alpha_1 = 2t + \sigma_1 + y \\ \alpha_2 = -(t^2 + 2t(\sigma_1 + y) + \sigma_2 + y\sigma_1) \\ \alpha_3 = t^2(\sigma_1 + y) + 2t(\sigma_2 + y\sigma_1) + \sigma_3 + y\sigma_2 \\ \alpha_4 = -(t^2(\sigma_2 + y\sigma_1) + 2t(\sigma_3 + y\sigma_2) + \sigma_4 + y\sigma_3) \\ \dots \\ \alpha_k = (-1)^{k-1}(t^2(\sigma_{k-2} + y\sigma_{k-3}) + 2t(\sigma_{k-1} + y\sigma_{k-2}) + \sigma_k + y\sigma_{k-1}) \\ \dots \\ \alpha_{n-1} = (-1)^{n-2}(t^2(\sigma_{n-3} + y\sigma_{n-4}) + 2t(\sigma_{n-2} + y\sigma_{n-3}) + y\sigma_{n-2}) \\ \alpha_n = (-1)^{n-1}(t^2(\sigma_{n-2} + y\sigma_{n-3}) + 2ty\sigma_{n-2}) \\ \alpha_{n+1} = (-1)^n t^2 y\sigma_{n-2}, \end{cases}$$

где σ_i, $i = 1, \dots, n-2$, определены в (П.8), $t \in [-1, 1]$, $-1 \leqslant x_3 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant \leqslant y \leqslant 1$.

Параметризация (П.11) получена на основании формул Виета после приравнивания корней $x_1 = x_2 = t$. Упорядочивание параметров $x_3, \dots, x_n, y$ связано с тем, что параметризация (П.11) симметрична относительно перестановок указанных параметров.

По определению

$$(\text{П}.12)\qquad S(Surf_{n+1}) = \underset{\substack{t\in[-1,1] \\ -1\leqslant x_3\leqslant\ldots\leqslant x_n\leqslant y\leqslant 1}}{\int\cdots\int} \|A_{n+1}\| dt\, dx_3 \dots dx_n\, dy,$$

где A_{n+1} – определитель:

$$(\text{П}.13)\qquad A_{n+1} = \begin{vmatrix} \mathrm{j}_1 & \dfrac{\partial\alpha_1}{\partial t} & \dfrac{\partial\alpha_1}{\partial x_3} & \cdots & \dfrac{\partial\alpha_1}{\partial x_n} & \dfrac{\partial\alpha_1}{\partial y} \\ \mathrm{j}_2 & \dfrac{\partial\alpha_2}{\partial t} & \dfrac{\partial\alpha_2}{\partial x_3} & \cdots & \dfrac{\partial\alpha_2}{\partial x_n} & \dfrac{\partial\alpha_2}{\partial y} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathrm{j}_n & \dfrac{\partial\alpha_n}{\partial t} & \dfrac{\partial\alpha_n}{\partial x_3} & \cdots & \dfrac{\partial\alpha_n}{\partial x_n} & \dfrac{\partial\alpha_n}{\partial y} \\ \mathrm{j}_{n+1} & \dfrac{\partial\alpha_{n+1}}{\partial t} & \dfrac{\partial\alpha_{n+1}}{\partial x_3} & \cdots & \dfrac{\partial\alpha_{n+1}}{\partial x_n} & \dfrac{\partial\alpha_{n+1}}{\partial y} \end{vmatrix},$$

$\{\mathrm{j}_1, \dots, \mathrm{j}_{n+1}\}$ – ортонормированный базис в пространстве R^{n+1}.

Рассмотрим A_{n+1} как вектор-функцию от y:

$$(\text{П}.14)\qquad A_{n+1} = G(y) = \sum_{j=1}^{n+1} \mathrm{j}_j \times g_j(y) = (g_1(y), \dots, g_{n+1}(y)).$$

С учетом (П.11) можно увидеть, что $g_j(y)$, $j = 1 \ldots n+1$, являются полиномами от y степени не выше $n-1$.

Покажем, что $G(y) = 0$ при $y = t$ и при $y = x_i$, $i = 3, \ldots, n$.

Из (П.11) можно увидеть, что для $k = 1, \ldots, n+1$

$$\alpha_k = (-1)^{k-1} \left(t^2(\sigma_{k-2} + y\sigma_{k-3}) + 2t(\sigma_{k-1} + y\sigma_{k-2}) + \sigma_k + y\sigma_{k-1} \right),$$

где σ_i определены выше для $i = 1, \ldots, n-2$, $\sigma_0 = 1$, $\sigma_m = 0$ при $m < 0$ и при $m > n-2$.

Тогда

$$\frac{\partial \alpha_k}{\partial y} = (-1)^{k-1}(t^2\sigma_{k-3} + 2t\sigma_{k-2} + \sigma_{k-1}),$$
$$\frac{\partial \alpha_k}{\partial t} = (-1)^{k-1} 2(t(\sigma_{k-2} + y\sigma_{k-3}) + \sigma_{k-1} + y\sigma_{k-2}),$$
$$\frac{\partial \alpha_k}{\partial x_r} = (-1)^{k-1} \left(t^2 \left(\frac{\partial \sigma_{k-2}}{\partial x_r} + y \frac{\partial \sigma_{k-3}}{\partial x_r} \right) + 2t \left(\frac{\partial \sigma_{k-1}}{\partial x_r} + y \frac{\partial \sigma_{k-2}}{\partial x_r} \right) + \frac{\partial \sigma_k}{\partial x_r} + y \frac{\partial \sigma_{k-1}}{\partial x_r} \right),$$

где $r = n-3, \ldots, n$.

Для $\frac{\partial \sigma_i}{\partial x_r}$ выполняется равенство

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial x_r} = \sigma_{i-1}^{(r)},$$

где $\sigma_j^{(r)}$ – это элементарный симметрический многочлен степени j от $n-3$ переменных $x_3, \ldots, x_{r-1}, x_{r+1}, \ldots, x_n$.

Тогда

$$\text{(П.15)} \quad \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_r} = (-1)^{k-1} \left(t^2 \left(\sigma_{k-3}^{(r)} + y\sigma_{k-4}^{(r)} \right) + 2t \left(\sigma_{k-2}^{(r)} + y\sigma_{k-3}^{(r)} \right) + \sigma_{k-1}^{(r)} + y\sigma_{k-2}^{(r)} \right).$$

Для σ_i и $\sigma_i^{(r)}$ выполняется равенство

$$\text{(П.16)} \quad \sigma_i = \sigma_i^{(r)} + x_r \sigma_{i-1}^{(r)}.$$

Тогда на основании (П.15) и (П.16) можно увидеть, что $\forall k = 1, \ldots, n+1$ выполняется равенство

$$\left. \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_r} \right|_{y=x_r} = (-1)^{k-1}(t^2\sigma_{k-3} + 2t\sigma_{k-2} + \sigma_{k-1}) = \frac{\partial \alpha_k}{\partial y}.$$

Это означает, что при $y = x_r$ столбец r равен столбцу $n+1$ в определителе A_{n+1} (П.13), $r = 3, \ldots, n$.

Кроме того,

$$\left. \frac{\partial \alpha_k}{\partial t} \right|_{y=t} = (-1)^{k-1}(t^2\sigma_{k-3} + 2t\sigma_{k-2} + \sigma_{k-1}) = \frac{\partial \alpha_k}{\partial y}.$$

Это означает, что при $y=t$ столбец 2 равен столбцу $n+1$ в определителе A_{n+1} (П.13).

Таким образом,

$$G(y) = K\ (t-y) \prod_{3\leqslant i\leqslant n} (x_i - y), \tag{П.17}$$

где K – вектор в R^{n+1}.

Тогда

$$A_{n+1}|_{y=0} = G(0) = Ktx_3\cdots x_n, \tag{П.18}$$

где $A_{n+1}|_{y=0}$ – определитель A_{n+1} в (П.13) при $y=0$.

Определитель $A_{n+1}|_{y=0}$ можно разложить по последней строке, учитывая, что ненулевыми останутся только первый и последний элементы строки. Тогда

$$A_{n+1}|_{y=0} = \mathrm{j}_{n+1}B_n + A_n\ \frac{\partial\alpha_{n+1}}{\partial y}\bigg|_{y=0}$$

и

$$\|\,A_{n+1}|_{y=0}\| = \sqrt{(B_n)^2 + \|A_n\|^2(t^2x_3\cdots x_n)^2}, \tag{П.19}$$

где $\|A_n\|$ опредена в (П.10), B_n – алгебраическое дополнение элемента j_{n+1} в определителе $A_{n+1}|_{y=0}$.

С учетом (П.11)

$$B_n \simeq \tag{П.20}$$

$$\simeq \begin{vmatrix}
2 & 1 & \cdots & 1 & 1\\
2t+2\sigma_1 & 2t+\sigma_1^{(3)} & \cdots & 2t+\sigma_1^{(n)} & 2t+\sigma_1\\
2t\sigma_1+2\sigma_2 & t^2+2t\sigma_1^{(3)}+\sigma_2^{(3)} & \cdots & t^2+2t\sigma_1^{(n)}+\sigma_2^{(n)} & t^2+2t\sigma_1+\sigma_2\\
2t\sigma_2+2\sigma_3 & t^2\sigma_1^{(3)}+2t\sigma_2^{(3)}+\sigma_3^{(3)} & \cdots & t^2\sigma_1^{(n)}+2t\sigma_2^{(n)}+\sigma_3^{(n)} & t^2\sigma_1+2t\sigma_2+\sigma_3\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
2t\sigma_{n-4}+2\sigma_{n-3} & t^2\sigma_{n-5}^{(3)}+2t\sigma_{n-4}^{(3)}+\sigma_{n-3}^{(3)} & \cdots & t^2\sigma_{n-5}^{(n)}+2t\sigma_{n-4}^{(n)}+\sigma_{n-3}^{(n)} & t^2\sigma_{n-5}+2t\sigma_{n-4}+\sigma_{n-3}\\
2t\sigma_{n-3}+2\sigma_{n-2} & t^2\sigma_{n-4}^{(3)}+2t\sigma_{n-3}^{(3)} & \cdots & t^2\sigma_{n-4}^{(n)}+2t\sigma_{n-3}^{(n)} & t^2\sigma_{n-4}+2t\sigma_{n-3}+\sigma_{n-2}\\
2t\sigma_{n-2} & t^2\sigma_{n-3}^{(3)} & \cdots & t^2\sigma_{n-3}^{(n)} & t^2\sigma_{n-3}+2t\sigma_{n-2}
\end{vmatrix}$$

Лемма 1.

$$B_n \simeq 2tx_3\cdots x_n \left(\prod_{3\leqslant i\leqslant n} |t-x_i|\right)\left(\prod_{3\leqslant i<j\leqslant n} |x_i-x_j|\right). \tag{П.21}$$

Доказательство леммы 1 приведено в конце доказательства теоремы.

Используя (П.19), (П.10) и (П.21) в лемме 1, получим

$$\| A_{n+1}|_{y=0} \| =$$

$$= 2|tx_3 \cdots x_n| \left(\prod_{3 \leqslant i \leqslant n} |t - x_i| \right) \left(\prod_{3 \leqslant i < j \leqslant n} |x_i - x_j| \right) \sqrt{1 + t^2(1 + t^2 + \ldots + t^{2(n-1)})}$$

и на основании (П.18) находим

$$\|K\| = \frac{\| A_{n+1}|_{y=0} \|}{|tx_3 \cdots x_n|}. \tag{П.22}$$

Возвращая обозначение $x_{n+1} = y$, на основании (П.17) и (П.22) получаем

$$\|G(x_{n+1})\| = 2 \left(\prod_{3 \leqslant i \leqslant n+1} |t - x_i| \right) \left(\prod_{3 \leqslant i < j \leqslant n+1} |x_i - x_j| \right) \sqrt{1 + t^2 + \ldots + t^{2n}}. \tag{П.23}$$

И на основании (П.12), (П.14) и (П.23) получаем требуемое индукционное выражение

$$S(Surf_{n+1}) = \tag{П.24}$$

$$= 2 \underset{\substack{t \in [-1,1] \\ -1 \leqslant x_3 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant 1}}{\int \cdots \int} \sqrt{1 + t^2 + \ldots + t^{2n}} \left(\prod_{3 \leqslant i \leqslant n+1} |t - x_i| \right) \times$$

$$\times \left(\prod_{3 \leqslant i < j \leqslant n+1} |x_i - x_j| \right) dt\, dx_3 \ldots dx_n\, dx_{n+1}.$$

Доказательство леммы 1. Стандартными вычислениями можно проверить, что утверждение леммы выполняется для $n = 3, 4$.

$$B_3 \simeq \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2t + 2x_3 & 2t & 2t + x_3 \\ 2tx_3 & t^2 & t^2 + 2tx_3 \end{vmatrix} \simeq 2tx_3(t - x_3),$$

$$B_4 \simeq \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2t + 2(x_3 + x_4) & 2t + x_4 & 2t + x_3 & 2t + x_3 + x_4 \\ 2t(x_3 + x_4) + 2x_3x_4 & t^2 + 2tx_4 & t^2 + 2tx_3 & t^2 + 2t(x_3 + x_4) + x_3x_4 \\ 2tx_3x_4 & t^2x_4 & t^2x_3 & t^2(x_3 + x_4) + 2tx_3x_4 \end{vmatrix} \simeq$$

$$\simeq 2tx_3x_4(t - x_3)(t - x_4)(x_3 - x_4).$$

Докажем утверждение леммы для произвольного n.

Отдельно можно отметить, что в сжатом виде идея доказательства представлена в «II. Solution by R.J. Walker» [7], где доказывается похожее утверждение.

Первый шаг.

На основании (П.16) делаем тождественные замены в (П.20) в строках $2, \ldots, n$ в столбцах $2, \ldots, n-1$. Получаем

$$B_n \simeq 2*$$

$$*\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ t+\sigma_1 & 2t+\sigma_1-x_3 & \cdots & 2t+\sigma_1-x_n & 2t+\sigma_1 \\ t\sigma_1+\sigma_2 & t^2+2t(\sigma_1-x_3)+\sigma_2-x_3\sigma_1^{(3)} & \cdots & t^2+2t(\sigma_1-x_n)+\sigma_2-x_n\sigma_1^{(n)} & t^2+2t\sigma_1+\sigma_2 \\ t\sigma_2+\sigma_3 & \begin{matrix} t^2(\sigma_1-x_3)+2t(\sigma_2-x_3\sigma_1^{(3)})+ \\ +\sigma_3-x_3\sigma_2^{(3)} \end{matrix} & \cdots & \begin{matrix} t^2(\sigma_1-x_n)+2t(\sigma_2-x_n\sigma_1^{(n)})+ \\ +\sigma_3-x_n\sigma_2^{(n)} \end{matrix} & t^2\sigma_1+2t\sigma_2+\sigma_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t\sigma_{n-3}+\sigma_{n-2} & \begin{matrix} t^2(\sigma_{n-4}-x_3\sigma_{n-5}^{(3)})+ \\ +2t(\sigma_{n-3}-x_3\sigma_{n-4}^{(3)}) \end{matrix} & \cdots & \begin{matrix} t^2(\sigma_{n-4}-x_n\sigma_{n-5}^{(n)})+ \\ +2t(\sigma_{n-3}-x_n\sigma_{n-4}^{(n)}) \end{matrix} & t^2\sigma_{n-4}+2t\sigma_{n-3}+\sigma_{n-2} \\ t\sigma_{n-2} & t^2(\sigma_{n-3}-x_3\sigma_{n-4}^{(3)}) & \cdots & t^2(\sigma_{n-3}-x_n\sigma_{n-4}^{(n)}) & t^2\sigma_{n-3}+2t\sigma_{n-2} \end{vmatrix}.$$

Из строк $j = 2, \ldots, n-1$ вычитаем первую строку, умноженную на последний элемент j-й строки $b_{j,n}$. Из строки n вычитаем первую строку, умноженную на $t^2\sigma_{n-3}$. Умножаем строки $j = 2, \ldots, n$ на -1. Получаем

$$B_n \simeq 2*$$

$$*\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ t & x_3 & \cdots & x_n & 0 \\ t^2+t\sigma_1 & 2tx_3+x_3\sigma_1^{(3)} & \cdots & 2tx_n+x_n\sigma_1^{(n)} & 0 \\ t^2\sigma_1+t\sigma_2 & t^2x_3+2tx_3\sigma_1^{(3)}+x_3\sigma_2^{(3)} & \cdots & t^2x_n+2tx_n\sigma_1^{(n)}+x_n\sigma_2^{(n)} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t^2\sigma_{n-5}+t\sigma_{n-4} & t^2x_3\sigma_{n-6}^{(3)}+2tx_3\sigma_{n-5}^{(3)}+x_3\sigma_{n-4}^{(3)} & \cdots & t^2x_n\sigma_{n-6}^{(n)}+2tx_n\sigma_{n-5}^{(n)}+x_n\sigma_{n-4}^{(n)} & 0 \\ t^2\sigma_{n-4}+t\sigma_{n-3} & t^2x_3\sigma_{n-5}^{(3)}+2tx_3\sigma_{n-4}^{(3)}+\sigma_{n-2} & \cdots & t^2x_n\sigma_{n-5}^{(n)}+2tx_n\sigma_{n-4}^{(n)}+\sigma_{n-2} & 0 \\ t^2\sigma_{n-3}-t\sigma_{n-2} & t^2x_3\sigma_{n-4}^{(3)} & \cdots & t^2x_n\sigma_{n-4}^{(n)} & -2t\sigma_{n-2} \end{vmatrix}.$$

В строке $n-1$ в столбцах $j = 2, \ldots, n-1$ делаем замену обозначения $\sigma_{n-2} = x_{j+1}\sigma_{n-3}^{(j+1)}$. Получаем

$$B_n \simeq 2*$$

$$*\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ t & x_3 & \cdots & x_n & 0 \\ t^2+t\sigma_1 & 2tx_3+x_3\sigma_1^{(3)} & \cdots & 2tx_n+x_n\sigma_1^{(n)} & 0 \\ t^2\sigma_1+t\sigma_2 & t^2x_3+2tx_3\sigma_1^{(3)}+x_3\sigma_2^{(3)} & \cdots & t^2x_n+2tx_n\sigma_1^{(n)}+x_n\sigma_2^{(n)} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t^2\sigma_{n-5}+t\sigma_{n-4} & t^2x_3\sigma_{n-6}^{(3)}+2tx_3\sigma_{n-5}^{(3)}+x_3\sigma_{n-4}^{(3)} & \cdots & t^2x_n\sigma_{n-6}^{(n)}+2tx_n\sigma_{n-5}^{(n)}+x_n\sigma_{n-4}^{(n)} & 0 \\ t^2\sigma_{n-4}+t\sigma_{n-3} & t^2x_3\sigma_{n-5}^{(3)}+2tx_3\sigma_{n-4}^{(3)}+x_3\sigma_{n-3}^{(3)} & \cdots & t^2x_n\sigma_{n-5}^{(n)}+2tx_n\sigma_{n-4}^{(n)}+x_n\sigma_{n-3}^{(n)} & 0 \\ t^2\sigma_{n-3}-t\sigma_{n-2} & t^2x_3\sigma_{n-4}^{(3)} & \cdots & t^2x_n\sigma_{n-4}^{(n)} & -2t\sigma_{n-2} \end{vmatrix}.$$

Из первого столбца выносим множитель t, из столбцов $j = 2, \dots, n-1$ выносим множители x_{j+1}. Получаем

$$B_n \simeq 2tx_3 \cdots x_n *$$

$$* \begin{vmatrix} t^{-1} & x_3^{-1} & \cdots & x_n^{-1} & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ t+\sigma_1 & 2t+\sigma_1^{(3)} & \cdots & 2t+\sigma_1^{(n)} & 0 \\ t\sigma_1+\sigma_2 & t^2+2t\sigma_1^{(3)}+\sigma_2^{(3)} & \cdots & t^2+2t\sigma_1^{(n)}+\sigma_2^{(n)} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t\sigma_{n-5}+\sigma_{n-4} & t^2\sigma_{n-6}^{(3)}+2t\sigma_{n-5}^{(3)}+\sigma_{n-4}^{(3)} & \cdots & t^2\sigma_{n-6}^{(n)}+2t\sigma_{n-5}^{(n)}+\sigma_{n-4}^{(n)} & 0 \\ t\sigma_{n-4}+\sigma_{n-3} & t^2\sigma_{n-5}^{(3)}+2t\sigma_{n-4}^{(3)}+\sigma_{n-3}^{(3)} & \cdots & t^2\sigma_{n-5}^{(n)}+2t\sigma_{n-4}^{(n)}+\sigma_{n-3}^{(n)} & 0 \\ t\sigma_{n-3}-\sigma_{n-2} & t^2\sigma_{n-4}^{(3)} & \cdots & t^2\sigma_{n-4}^{(n)} & (-1)^1 2t\sigma_{n-2} \end{vmatrix}.$$

Второй шаг.

На основании (П.16) делаем тождественные замены в строках $3, \dots, n$ в столбцах $2, \dots, n-1$. Получаем

$$B_n \simeq 2tx_3 \cdots x_n *$$

$$* \begin{vmatrix} t^{-1} & x_3^{-1} & \cdots & x_n^{-1} & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ t+\sigma_1 & 2t+\sigma_1-x_3 & \cdots & 2t+\sigma_1-x_n & 0 \\ t\sigma_1+\sigma_2 & t^2+2t(\sigma_1-x_3)+\sigma_2-x_3\sigma_1^{(3)} & \cdots & t^2+2t(\sigma_1-x_n)+\sigma_2-x_n\sigma_1^{(n)} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t\sigma_{n-5}+\sigma_{n-4} & \begin{matrix} t^2(\sigma_{n-6}-x_3\sigma_{n-7}^{(3)})+ \\ +2t(\sigma_{n-5}-x_3\sigma_{n-6}^{(3)})+ \\ +\sigma_{n-4}-x_3\sigma_{n-5}^{(3)} \end{matrix} & \cdots & \begin{matrix} t^2(\sigma_{n-6}-x_n\sigma_{n-7}^{(n)})+ \\ +2t(\sigma_{n-5}-x_n\sigma_{n-6}^{(n)})+ \\ +\sigma_{n-4}-x_n\sigma_{n-5}^{(n)} \end{matrix} & 0 \\ t\sigma_{n-4}+\sigma_{n-3} & \begin{matrix} t^2(\sigma_{n-5}-x_3\sigma_{n-6}^{(3)})+ \\ +2t(\sigma_{n-4}-x_3\sigma_{n-5}^{(3)})+ \\ +\sigma_{n-3}-x_3\sigma_{n-4}^{(3)} \end{matrix} & \cdots & \begin{matrix} t^2(\sigma_{n-5}-x_n\sigma_{n-6}^{(n)})+ \\ +2t(\sigma_{n-4}-x_n\sigma_{n-5}^{(n)})+ \\ +\sigma_{n-3}-x_n\sigma_{n-4}^{(n)} \end{matrix} & 0 \\ t\sigma_{n-3}-\sigma_{n-2} & t^2(\sigma_{n-4}-x_3\sigma_{n-5}^{(3)}) & \cdots & t^2(\sigma_{n-4}-x_n\sigma_{n-5}^{(n)}) & -2t\sigma_{n-2} \end{vmatrix}.$$

Из строки 3 вычитаем строку 2, умноженную на $2t+\sigma_1$. Из строки 4 вычитаем строку 2, умноженную на $t^2+2t\sigma_1+\sigma_2$. Из строк $j = 5, \dots, n-1$ вычитаем строку 2, умноженную на $t^2\sigma_{j-4}+2t\sigma_{j-3}+\sigma_{j-2}$. Из строки n вычитаем строку 2, умноженную на $t^2\sigma_{n-4}-\sigma_{n-2}$. Умножаем строки $j = 3, \dots, n$ на -1.

Получаем

$$B_n \simeq 2tx_3\cdots x_n *$$

$$* \begin{vmatrix} t^{-1} & x_3^{-1} & \cdots & x_n^{-1} & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ t & x_3 & \cdots & x_n & 0 \\ t^2+t\sigma_1 & 2tx_3+x_3\sigma_1^{(3)} & \cdots & 2tx_n+x_n\sigma_1^{(n)} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t^2\sigma_{n-6}+t\sigma_{n-5} & t^2x_3\sigma_{n-7}^{(3)}+2tx_3\sigma_{n-6}^{(3)}+x_3\sigma_{n-5}^{(3)} & \cdots & t^2x_n\sigma_{n-7}^{(n)}+2tx_n\sigma_{n-6}^{(n)}+x_n\sigma_{n-5}^{(n)} & 0 \\ t^2\sigma_{n-5}+t\sigma_{n-4} & t^2x_3\sigma_{n-6}^{(3)}+2tx_3\sigma_{n-5}^{(3)}+x_3\sigma_{n-4}^{(3)} & \cdots & t^2x_n\sigma_{n-6}^{(n)}+2tx_n\sigma_{n-5}^{(n)}+x_n\sigma_{n-4}^{(n)} & 0 \\ t^2\sigma_{n-4}-t\sigma_{n-3} & t^2x_3\sigma_{n-5}^{(3)}-\sigma_{n-2} & \cdots & t^2x_n\sigma_{n-5}^{(n)}-\sigma_{n-2} & 2t\sigma_{n-2} \end{vmatrix}.$$

В строке n в столбцах $j=2,\ldots,n-1$ делаем замену обозначения $\sigma_{n-2} = = x_{j+1}\sigma_{n-3}^{(j+1)}$. Получаем

$$B_n \simeq 2tx_3\cdots x_n *$$

$$* \begin{vmatrix} t^{-1} & x_3^{-1} & \cdots & x_n^{-1} & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ t & x_3 & \cdots & x_n & 0 \\ t^2+t\sigma_1 & 2tx_3+x_3\sigma_1^{(3)} & \cdots & 2tx_n+x_n\sigma_1^{(n)} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t^2\sigma_{n-6}+t\sigma_{n-5} & t^2x_3\sigma_{n-7}^{(3)}+2tx_3\sigma_{n-6}^{(3)}+x_3\sigma_{n-5}^{(3)} & \cdots & t^2x_n\sigma_{n-7}^{(n)}+2tx_n\sigma_{n-6}^{(n)}+x_n\sigma_{n-5}^{(n)} & 0 \\ t^2\sigma_{n-5}+t\sigma_{n-4} & t^2x_3\sigma_{n-6}^{(3)}+2tx_3\sigma_{n-5}^{(3)}+x_3\sigma_{n-4}^{(3)} & \cdots & t^2x_n\sigma_{n-6}^{(n)}+2tx_n\sigma_{n-5}^{(n)}+x_n\sigma_{n-4}^{(n)} & 0 \\ t^2\sigma_{n-4}-t\sigma_{n-3} & t^2x_3\sigma_{n-5}^{(3)}-x_3\sigma_{n-3}^{(3)} & \cdots & t^2x_n\sigma_{n-5}^{(n)}-x_n\sigma_{n-3}^{(n)} & 2t\sigma_{n-2} \end{vmatrix}.$$

Из первого столбца выносим множитель t, из столбцов $j=2,\ldots,n-1$ выносим множители x_{j+1}. Получаем

$$B_n \simeq 2t^2x_3^2\cdots x_n^2 *$$

$$* \begin{vmatrix} t^{-2} & x_3^{-2} & \cdots & x_n^{-2} & 1 \\ t^{-1} & x_3^{-1} & \cdots & x_n^{-1} & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ t+\sigma_1 & 2t+\sigma_1^{(3)} & \cdots & 2t+\sigma_1^{(n)} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t\sigma_{n-6}+\sigma_{n-5} & t^2\sigma_{n-7}^{(3)}+2t\sigma_{n-6}^{(3)}+\sigma_{n-5}^{(3)} & \cdots & t^2\sigma_{n-7}^{(n)}+2t\sigma_{n-6}^{(n)}+\sigma_{n-5}^{(n)} & 0 \\ t\sigma_{n-5}+\sigma_{n-4} & t^2\sigma_{n-6}^{(3)}+2t\sigma_{n-5}^{(3)}+\sigma_{n-4}^{(3)} & \cdots & t^2\sigma_{n-6}^{(n)}+2t\sigma_{n-5}^{(n)}+\sigma_{n-4}^{(n)} & 0 \\ t\sigma_{n-4}-\sigma_{n-3} & t^2\sigma_{n-5}^{(3)}-\sigma_{n-3}^{(3)} & \cdots & t^2\sigma_{n-5}^{(n)}-\sigma_{n-3}^{(n)} & (-1)^2 2t\sigma_{n-2} \end{vmatrix}.$$

Третий шаг.

На основании (П.16) делаем тождественные замены в строках $4, \ldots, n$ в столбцах $2, \ldots, n-1$. Получаем

$$B_n \simeq 2t^2 x_3^2 \cdots x_n^2 *$$

$$* \begin{vmatrix} t^{-2} & x_3^{-2} & \cdots & x_n^{-2} & 1 \\ t^{-1} & x_3^{-1} & \cdots & x_n^{-1} & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ t+\sigma_1 & 2t+\sigma_1-x_3 & \cdots & 2t+\sigma_1-x_n & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t\sigma_{n-6}+\sigma_{n-5} & \begin{matrix} t^2(\sigma_{n-7}-x_3\sigma_{n-8}^{(3)})+ \\ +2t(\sigma_{n-6}-x_3\sigma_{n-7}^{(3)})+ \\ +\sigma_{n-5}-x_3\sigma_{n-6}^{(3)} \end{matrix} & \cdots & \begin{matrix} t^2(\sigma_{n-7}-x_n\sigma_{n-8}^{(n)})+ \\ +2t(\sigma_{n-6}-x_n\sigma_{n-7}^{(n)})+ \\ +\sigma_{n-5}-x_n\sigma_{n-6}^{(n)} \end{matrix} & 0 \\ t\sigma_{n-5}+\sigma_{n-4} & \begin{matrix} t^2(\sigma_{n-6}-x_3\sigma_{n-7}^{(3)})+ \\ +2t(\sigma_{n-5}-x_3\sigma_{n-6}^{(3)})+ \\ +\sigma_{n-4}-x_3\sigma_{n-5}^{(3)} \end{matrix} & \cdots & \begin{matrix} t^2(\sigma_{n-6}-x_n\sigma_{n-7}^{(n)})+ \\ +2t(\sigma_{n-5}-x_n\sigma_{n-6}^{(n)})+ \\ +\sigma_{n-4}-x_n\sigma_{n-5}^{(n)} \end{matrix} & 0 \\ t\sigma_{n-4}-\sigma_{n-3} & \begin{matrix} t^2(\sigma_{n-5}-x_3\sigma_{n-6}^{(3)})- \\ -(\sigma_{n-3}-x_3\sigma_{n-4}^{(3)}) \end{matrix} & \cdots & \begin{matrix} t^2(\sigma_{n-5}-x_n\sigma_{n-6}^{(n)})- \\ -(\sigma_{n-3}-x_n\sigma_{n-4}^{(n)}) \end{matrix} & 2t\sigma_{n-2} \end{vmatrix}.$$

Из строки 4 вычитаем строку 3, умноженную на $2t+\sigma_1$. Из строки 5 вычитаем строку 3, умноженную на $t^2+2t\sigma_1+\sigma_2$. Из строк $j=6,\ldots,n-1$ вычитаем строку 3, умноженную на $t^2\sigma_{j-5}+2t\sigma_{j-4}+\sigma_{j-3}$. Из строки n вычитаем строку 3, умноженную на $t^2\sigma_{n-5}-\sigma_{n-3}$. Умножаем строки $j=4,\ldots,n$ на -1. Получаем

$$B_n \simeq 2t^2 x_3^2 \cdots x_n^2 *$$

$$* \begin{vmatrix} t^{-2} & x_3^{-2} & \cdots & x_n^{-2} & 1 \\ t^{-1} & x_3^{-1} & \cdots & x_n^{-1} & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ t & x_3 & \cdots & x_n & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t^2\sigma_{n-7}+t\sigma_{n-6} & t^2x_3\sigma_{n-8}^{(3)}+2tx_3\sigma_{n-7}^{(3)}+x_3\sigma_{n-6}^{(3)} & \cdots & t^2x_n\sigma_{n-8}^{(n)}+2tx_n\sigma_{n-7}^{(n)}+x_n\sigma_{n-6}^{(n)} & 0 \\ t^2\sigma_{n-6}+t\sigma_{n-5} & t^2x_3\sigma_{n-7}^{(3)}+2tx_3\sigma_{n-6}^{(3)}+x_3\sigma_{n-5}^{(3)} & \cdots & t^2x_n\sigma_{n-7}^{(n)}+2tx_n\sigma_{n-6}^{(n)}+x_n\sigma_{n-5}^{(n)} & 0 \\ t^2\sigma_{n-5}-t\sigma_{n-4} & t^2x_3\sigma_{n-6}^{(3)}-x_3\sigma_{n-4}^{(3)} & \cdots & t^2x_n\sigma_{n-6}^{(n)}-x_n\sigma_{n-4}^{(n)} & -2t\sigma_{n-2} \end{vmatrix}.$$

Из первого столбца выносим множитель t, из столбцов $j = 2, \ldots, n-1$ выносим множители x_{j+1}. Получаем

$$B_n \simeq 2t^3 x_3^3 \cdots x_n^3 *$$

$$* \begin{vmatrix} t^{-3} & x_3^{-3} & \cdots & x_n^{-3} & 1 \\ t^{-2} & x_3^{-2} & \cdots & x_n^{-2} & 0 \\ t^{-1} & x_3^{-1} & \cdots & x_n^{-1} & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t\sigma_{n-7} + \sigma_{n-6} & t^2\sigma_{n-8}^{(3)} + 2t\sigma_{n-7}^{(3)} + \sigma_{n-6}^{(3)} & \cdots & t^2\sigma_{n-8}^{(n)} + 2t\sigma_{n-7}^{(n)} + \sigma_{n-6}^{(n)} & 0 \\ t\sigma_{n-6} + \sigma_{n-5} & t^2\sigma_{n-7}^{(3)} + 2t\sigma_{n-6}^{(3)} + \sigma_{n-5}^{(3)} & \cdots & t^2\sigma_{n-7}^{(n)} + 2t\sigma_{n-6}^{(n)} + \sigma_{n-5}^{(n)} & 0 \\ t\sigma_{n-5} - \sigma_{n-4} & t^2\sigma_{n-6}^{(3)} - \sigma_{n-4}^{(3)} & \cdots & t^2\sigma_{n-6}^{(n)} - \sigma_{n-4}^{(n)} & (-1)^3 2t\sigma_{n-2} \end{vmatrix}.$$

На этом закончен третий шаг.

Далее по аналогии с шагом 3 выполняем шаги $4, \ldots, n-5$.

После шага $n-5$

$$B_n \simeq 2t^{n-5} x_3^{n-5} \cdots x_n^{n-5} *$$

$$* \begin{vmatrix} t^{-n+5} & x_3^{-n+5} & \cdots & x_n^{-n+5} & 1 \\ t^{-n+6} & x_3^{-n+6} & \cdots & x_n^{-n+6} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t^{-1} & x_3^{-1} & \cdots & x_n^{-1} & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ t + \sigma_1 & 2t + \sigma_1^{(3)} & \cdots & 2t + \sigma_1^{(n)} & 0 \\ t\sigma_1 + \sigma_2 & t^2 + 2t\sigma_1^{(3)} + \sigma_2^{(3)} & \cdots & t^2 + 2t\sigma_1^{(n)} + \sigma_2^{(n)} & 0 \\ t\sigma_2 + \sigma_3 & t^2\sigma_1^{(3)} + 2t\sigma_2^{(3)} + \sigma_3^{(3)} & \cdots & t^2\sigma_1^{(n)} + 2t\sigma_2^{(n)} + \sigma_3^{(n)} & 0 \\ t\sigma_3 - \sigma_4 & t^2\sigma_2^{(3)} - \sigma_4^{(3)} & \cdots & t^2\sigma_2^{(n)} - \sigma_4^{(n)} & (-1)^{n-5} 2t\sigma_{n-2} \end{vmatrix}.$$

$(n-4)$-й шаг.

На основании (П.16) делаем тождественные замены в строках $(n-3), \dots, n$ в столбцах $2, \dots, n-1$. Получаем

$$B_n \simeq 2t^{n-5}x_3^{n-5}\cdots x_n^{n-5} *$$

$$* \begin{vmatrix} t^{-n+5} & x_3^{-n+5} & \cdots & x_n^{-n+5} & 1 \\ t^{-n+6} & x_3^{-n+6} & \cdots & x_n^{-n+6} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t^{-1} & x_3^{-1} & \cdots & x_n^{-1} & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ t+\sigma_1 & 2t+\sigma_1-x_3 & \cdots & 2t+\sigma_1-x_n & 0 \\ t\sigma_1+\sigma_2 & \begin{matrix} t^2+2t(\sigma_1-x_3)+ \\ +\sigma_2-x_3\sigma_1^{(3)} \end{matrix} & \cdots & t^2+2t(\sigma_1-x_n)+\sigma_2-x_n\sigma_1^{(n)} & 0 \\ t\sigma_2+\sigma_3 & \begin{matrix} t^2(\sigma_1-x_3)+ \\ +2t(\sigma_2-x_3\sigma_1^{(3)})+ \\ +\sigma_3-x_3\sigma_2^3 \end{matrix} & \cdots & \begin{matrix} t^2(\sigma_1-x_n)+ \\ +2t(\sigma_2-x_n\sigma_1^{(n)})+ \\ +\sigma_3-x_n\sigma_2^{(n)} \end{matrix} & 0 \\ t\sigma_3-\sigma_4 & \begin{matrix} t^2(\sigma_2-x_3\sigma_1^{(3)})- \\ -(\sigma_4-x_3\sigma_3^{(3)}) \end{matrix} & \cdots & \begin{matrix} t^2(\sigma_2-x_n\sigma_1^{(n)})- \\ -(\sigma_4-x_n\sigma_3^{(n)}) \end{matrix} & (-1)^{n-5}2t\sigma_{n-2} \end{vmatrix}.$$

Из строки $n-3$ вычитаем строку $n-4$, умноженную на $2t+\sigma_1$. Из строки $n-2$ вычитаем строку $n-4$, умноженную на $t^2+2t\sigma_1+\sigma_2$. Из строки $n-1$ вычитаем строку $n-4$, умноженную на $t^2\sigma_1+2t\sigma_2+\sigma_3$. Из строки n вычитаем строку $n-4$, умноженную на $t^2\sigma_2-\sigma_4$. Умножаем строки $j=n-3,\dots,n$ на -1. Получаем

$$B_n \simeq 2t^{n-5}x_3^{n-5}\cdots x_n^{n-5} *$$

$$* \begin{vmatrix} t^{-n+5} & x_3^{-n+5} & \cdots & x_n^{-n+5} & 1 \\ t^{-n+6} & x_3^{-n+6} & \cdots & x_n^{-n+6} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t^{-1} & x_3^{-1} & \cdots & x_n^{-1} & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ t & x_3 & \cdots & x_n & 0 \\ t^2+t\sigma_1 & 2tx_3+x_3\sigma_1^{(3)} & \cdots & 2tx_n+x_n\sigma_1^{(n)} & 0 \\ t^2\sigma_1+t\sigma_2 & t^2x_3+2tx_3\sigma_1^{(3)}+x_3\sigma_2^3 & \cdots & t^2x_n+2tx_n\sigma_1^{(n)}+x_n\sigma_2^{(n)} & 0 \\ t^2\sigma_2-t\sigma_3 & t^2x_3\sigma_1^{(3)}-x_3\sigma_3^{(3)} & \cdots & t^2x_n\sigma_1^{(n)}-x_n\sigma_3^{(n)} & (-1)^{n-4}2t\sigma_{n-2} \end{vmatrix}.$$

Из первого столбца выносим множитель t, из столбцов $j = 2, \dots, n-1$ выносим множители x_{j+1}. Получаем

$$B_n \simeq 2t^{n-4}x_3^{n-4}\cdots x_n^{n-4}*$$

$$*\begin{vmatrix} t^{-n+4} & x_3^{-n+4} & \cdots & x_n^{-n+4} & 1 \\ t^{-n+5} & x_3^{-n+5} & \cdots & x_n^{-n+5} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t^{-2} & x_3^{-2} & \cdots & x_n^{-2} & 0 \\ t^{-1} & x_3^{-1} & \cdots & x_n^{-1} & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ t+\sigma_1 & 2t+\sigma_1^{(3)} & \cdots & 2t+\sigma_1^{(n)} & 0 \\ t\sigma_1+\sigma_2 & t^2+2t\sigma_1^{(3)}+\sigma_2^{(3)} & \cdots & t^2+2t\sigma_1^{(n)}+\sigma_2^{(n)} & 0 \\ t\sigma_2-\sigma_3 & t^2\sigma_1^{(3)}-\sigma_3^{(3)} & \cdots & t^2\sigma_1^{(n)}-\sigma_3^{(n)} & (-1)^{n-4}2t\sigma_{n-2} \end{vmatrix}.$$

$(n-3)$-й шаг.

На основании (П.16) делаем тождественные замены в строках $(n-2), \dots, n$ в столбцах $2, \dots, n-1$. Получаем

$$B_n \simeq 2t^{n-4}x_3^{n-4}\cdots x_n^{n-4}*$$

$$*\begin{vmatrix} t^{-n+4} & x_3^{-n+4} & \cdots & x_n^{-n+4} & 1 \\ t^{-n+5} & x_3^{-n+5} & \cdots & x_n^{-n+5} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t^{-2} & x_3^{-2} & \cdots & x_n^{-2} & 0 \\ t^{-1} & x_3^{-1} & \cdots & x_n^{-1} & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ t+\sigma_1 & 2t+\sigma_1-x_3 & \cdots & 2t+\sigma_1-x_n & 0 \\ t\sigma_1+\sigma_2 & \begin{matrix} t^2+2t(\sigma_1-x_3)+ \\ +\sigma_2-x_3\sigma_1^{(3)} \end{matrix} & \cdots & \begin{matrix} t^2+2t(\sigma_1-x_n)+ \\ +\sigma_2-x_n\sigma_1^{(n)} \end{matrix} & 0 \\ t\sigma_2-\sigma_3 & t^2(\sigma_1-x_3)-(\sigma_3-x_3\sigma_2^{(3)}) & \cdots & t^2(\sigma_1-x_n)-(\sigma_3-x_n\sigma_2^{(n)}) & (-1)^{n-4}2t\sigma_{n-2} \end{vmatrix}.$$

Из строки $n-2$ вычитаем строку $n-3$, умноженную на $2t+\sigma_1$. Из строки $n-1$ вычитаем строку $n-3$, умноженную на $t^2+2t\sigma_1+\sigma_2$. Из строки n вычитаем строку $n-3$, умноженную на $t^2\sigma_1-\sigma_3$. Умножаем строки $j =$

$= n-2, n-1, n$ на -1. Получаем

$$B_n \simeq 2t^{n-4}x_3^{n-4}\cdots x_n^{n-4} *$$

$$* \begin{vmatrix} t^{-n+4} & x_3^{-n+4} & \cdots & x_n^{-n+4} & 1 \\ t^{-n+5} & x_3^{-n+5} & \cdots & x_n^{-n+5} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t^{-2} & x_3^{-2} & \cdots & x_n^{-2} & 0 \\ t^{-1} & x_3^{-1} & \cdots & x_n^{-1} & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ t & x_3 & \cdots & x_n & 0 \\ t^2+t\sigma_1 & 2tx_3+x_3\sigma_1^{(3)} & \cdots & 2tx_n+x_n\sigma_1^{(n)} & 0 \\ t^2\sigma_1 - t\sigma_2 & t^2x_3 - x_3\sigma_2^{(3)} & \cdots & t^2x_n - x_n\sigma_2^{(n)} & (-1)^{n-3}2t\sigma_{n-2} \end{vmatrix}.$$

Из первого столбца выносим множитель t, из столбцов $j = 2, \ldots, n-1$ выносим множители x_{j+1}. Получаем

$$B_n \simeq 2t^{n-3}x_3^{n-3}\cdots x_n^{n-3} \begin{vmatrix} t^{-n+3} & x_3^{-n+3} & \cdots & x_n^{-n+3} & 1 \\ t^{-n+4} & x_3^{-n+4} & \cdots & x_n^{-n+4} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t^{-3} & x_3^{-3} & \cdots & x_n^{-3} & 0 \\ t^{-2} & x_3^{-2} & \cdots & x_n^{-2} & 0 \\ t^{-1} & x_3^{-1} & \cdots & x_n^{-1} & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ t+\sigma_1 & 2t+\sigma_1^{(3)} & \cdots & 2t+\sigma_1^{(n)} & 0 \\ t\sigma_1 - \sigma_2 & t^2 - \sigma_2^{(3)} & \cdots & t^2 - \sigma_2^{(n)} & (-1)^{n-3}2t\sigma_{n-2} \end{vmatrix}.$$

$(n-2)$-й шаг.

На основании (П.16) делаем тождественные замены в строках $n-1, n$ в столбцах $2, \ldots, n-1$. Получаем

$$B_n \simeq 2t^{n-3}x_3^{n-3}\cdots x_n^{n-3} *$$

$$* \begin{vmatrix} t^{-n+3} & x_3^{-n+3} & \cdots & x_n^{-n+3} & 1 \\ t^{-n+4} & x_3^{-n+4} & \cdots & x_n^{-n+4} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t^{-3} & x_3^{-3} & \cdots & x_n^{-3} & 0 \\ t^{-2} & x_3^{-2} & \cdots & x_n^{-2} & 0 \\ t^{-1} & x_3^{-1} & \cdots & x_n^{-1} & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ t+\sigma_1 & 2t+\sigma_1 - x_3 & \cdots & 2t+\sigma_1 - x_n & 0 \\ t\sigma_1 - \sigma_2 & t^2 - (\sigma_2 - x_3\sigma_1^{(3)}) & \cdots & t^2 - (\sigma_2 - x_n\sigma_1^{(n)}) & (-1)^{n-3}2t\sigma_{n-2} \end{vmatrix}.$$

Из строки $n-1$ вычитаем строку $n-2$, умноженную на $2t+\sigma_1$. Из строки n вычитаем строку $n-2$, умноженную на $t^2-\sigma_2$. Умножаем строки $j=n-1,n$ на -1. Получаем

$$B_n \simeq 2t^{n-3}x_3^{n-3}\cdots x_n^{n-3}\begin{vmatrix} t^{-n+3} & x_3^{-n+3} & \cdots & x_n^{-n+3} & 1 \\ t^{-n+4} & x_3^{-n+4} & \cdots & x_n^{-n+4} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t^{-3} & x_3^{-3} & \cdots & x_n^{-3} & 0 \\ t^{-2} & x_3^{-2} & \cdots & x_n^{-2} & 0 \\ t^{-1} & x_3^{-1} & \cdots & x_n^{-1} & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ t & x_3 & \cdots & x_n & 0 \\ t^2-t\sigma_1 & -x_3\sigma_1^{(3)} & \cdots & -x_n\sigma_1^{(n)} & (-1)^{n-2}2t\sigma_{n-2} \end{vmatrix}.$$

Из первого столбца выносим множитель t, из столбцов $j=2,\ldots,n-1$ выносим множители x_{j+1}. Получаем

$$B_n \simeq 2t^{n-2}x_3^{n-2}\cdots x_n^{n-2}\begin{vmatrix} t^{-n+2} & x_3^{-n+2} & \cdots & x_n^{-n+2} & 1 \\ t^{-n+3} & x_3^{-n+3} & \cdots & x_n^{-n+3} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t^{-4} & x_3^{-4} & \cdots & x_n^{-4} & 0 \\ t^{-3} & x_3^{-3} & \cdots & x_n^{-3} & 0 \\ t^{-2} & x_3^{-2} & \cdots & x_n^{-2} & 0 \\ t^{-1} & x_3^{-1} & \cdots & x_n^{-1} & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ t-\sigma_1 & -\sigma_1^{(3)} & \cdots & -\sigma_1^{(n)} & (-1)^{n-2}2t\sigma_{n-2} \end{vmatrix}.$$

$(n-1)$-й шаг.

На основании (П.16) делаем тождественные замены в последней строке в столбцах $2,\ldots,n-1$. Получаем

$$B_n \simeq 2t^{n-2}x_3^{n-2}\cdots x_n^{n-2}\begin{vmatrix} t^{-n+2} & x_3^{-n+2} & \cdots & x_n^{-n+2} & 1 \\ t^{-n+3} & x_3^{-n+3} & \cdots & x_n^{-n+3} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t^{-4} & x_3^{-4} & \cdots & x_n^{-4} & 0 \\ t^{-3} & x_3^{-3} & \cdots & x_n^{-3} & 0 \\ t^{-2} & x_3^{-2} & \cdots & x_n^{-2} & 0 \\ t^{-1} & x_3^{-1} & \cdots & x_n^{-1} & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ t-\sigma_1 & x_3-\sigma_1 & \cdots & x_n-\sigma_1 & (-1)^{n-2}2t\sigma_{n-2} \end{vmatrix}.$$

Из строки n вычитаем строку $n-1$, умноженную на $-\sigma_1$. Получаем

$$B_n \simeq 2t^{n-2}x_3^{n-2}\cdots x_n^{n-2}\begin{vmatrix} t^{-n+2} & x_3^{-n+2} & \cdots & x_n^{-n+2} & 1 \\ t^{-n+3} & x_3^{-n+3} & \cdots & x_n^{-n+3} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t^{-4} & x_3^{-4} & \cdots & x_n^{-4} & 0 \\ t^{-3} & x_3^{-3} & \cdots & x_n^{-3} & 0 \\ t^{-2} & x_3^{-2} & \cdots & x_n^{-2} & 0 \\ t^{-1} & x_3^{-1} & \cdots & x_n^{-1} & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ t & x_3 & \cdots & x_n & (-1)^{n-2}2t\sigma_{n-2} \end{vmatrix}.$$

Из первого столбца выносим множитель t, из столбцов $j = 2, \ldots, n-1$ выносим множители x_{j+1}. Получаем

$$B_n \simeq 2t^{n-1}x_3^{n-1}\cdots x_n^{n-1}\begin{vmatrix} t^{-n+1} & x_3^{-n+1} & \cdots & x_n^{-n+1} & 1 \\ t^{-n+2} & x_3^{-n+2} & \cdots & x_n^{-n+2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t^{-5} & x_3^{-5} & \cdots & x_n^{-5} & 0 \\ t^{-4} & x_3^{-4} & \cdots & x_n^{-4} & 0 \\ t^{-3} & x_3^{-3} & \cdots & x_n^{-3} & 0 \\ t^{-2} & x_3^{-2} & \cdots & x_n^{-2} & 0 \\ t^{-1} & x_3^{-1} & \cdots & x_n^{-1} & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & (-1)^{n-2}2t\sigma_{n-2} \end{vmatrix}.$$

На этом закончен шаг $(n-1)$, после которого возвращаем вынесенные множители в соответствующие столбцы определителя и получаем

$$B_n \simeq 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ t & x_3 & \cdots & x_n & 0 \\ t^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} & 0 \\ t^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & (-1)^{n-2}2t\sigma_{n-2} \end{vmatrix}. \tag{П.25}$$

После разложения определителя (П.25) по последнему столбцу, получаем

$$\begin{aligned} B_n \simeq 2\Big((-1)^{n+1}tx_3\cdots x_nV(t, x_3, \ldots, x_n) + \\ + (-1)^{2n}(-1)^{n-2}2tx_3\cdots x_nV(t, x_3, \ldots, x_n)\Big), \end{aligned} \tag{П.26}$$

где $V(t, x_3, \ldots, x_n)$ – определитель Вандермонда от переменных $t, x_3, \ldots, x_n$.

Учитывая разную четность степеней -1 в (П.26), получаем

$$B_n \simeq 2tx_3\cdots x_nV(t, x_3, \ldots, x_n).$$

Лемма 1 и теорема 2 доказаны.

Доказательство теоремы 3. В [2] показано, что

$$\log_2 V(D_n) = -\Big(\frac{n}{2} + \frac{1}{4}\Big) \log_2 n + O(n).$$

Следовательно,

$$\ln V(D_n) = -\Big(\frac{n}{2} + \frac{1}{4}\Big) \ln n + O(n).$$

В [3] показано, что

$$\ln \left(\frac{V(\mathcal{E}_n)}{V(D_n)} \right) = -\frac{\ln 2}{2} n^2 + \frac{1}{8} \ln n + O(1)$$

и

$$V(\mathcal{E}_n) = \int\limits_{-1\leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant 1} \!\!\cdots\!\! \int \left(\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} |x_i - x_j| \right) dx_1 \ldots dx_n = \tag{П.27}$$
$$= 2^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{k=1}^{n} \frac{\{(k-1)!\}^2}{(2k-1)!}.$$

Таким образом,

$$\ln V(\mathcal{E}_n) = -\frac{\ln 2}{2} n^2 - \Big(\frac{n}{2} + \frac{1}{8}\Big) \ln n + O(n). \tag{П.28}$$

На основании (П.5) из доказательства теоремы 1 имеем

$$S(Pl_n^{(1)}) = S(Pl_n^{(-1)}) = \sqrt{n}\, V(\mathcal{E}_{n-1}).$$

На основании (7) в теореме 2 и (П.27) можно увидеть, что

$$S(Surf_n) =$$

$$= 2 \int\limits_{\substack{x_1 \in [-1,1] \\ -1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{n-1} \leqslant 1}} \!\!\cdots\!\! \int \sqrt{1 + x_1^2 + \ldots + x_1^{2(n-1)}} \left(\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n-1} |x_i - x_j| \right) dx_1 \ldots dx_{n-1} \leqslant$$

$$\leqslant 2\sqrt{n} \int\limits_{\substack{x_1 \in [-1,1] \\ -1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{n-1} \leqslant 1}} \!\!\cdots\!\! \int \left(\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n-1} |x_i - x_j| \right) dx_1 \ldots dx_{n-1} = 2\sqrt{n}(n-1) V(\mathcal{E}_{n-1}).$$

Таким образом, на основании (8) получаем

$$S(\partial \mathcal{E}_n) \leqslant 2\sqrt{n}\, n V(\mathcal{E}_{n-1}). \tag{П.29}$$

На основании (П.28) и (П.29) получаем

$$\ln S(\partial\mathcal{E}_n) \leqslant -\frac{\ln 2}{2}n^2 - \frac{n}{2}\ln n + O(n).$$

Так как при значительно больших значениях n величина $(-\frac{\ln 2}{2}n^2 - \frac{n}{2}\ln n)$ доминирует над значением $O(n)$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \ln S(\partial\mathcal{E}_n) = -\infty$, откуда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} S(\partial\mathcal{E}_n) = 0$.

На этом закончено доказательство первой части теоремы 3.

Теперь докажем вторую часть теоремы 3 о том, что максимальное значение $S(\partial\mathcal{E}_n)$ достигается при $n = 3$.

Из (П.27) следует, что

$$V(\mathcal{E}_n) = V(\mathcal{E}_{n-1})\, 2^n \frac{\{(n-1)!\}^2}{(2n-1)!}, \qquad n \geqslant 2,$$
$$V(\mathcal{E}_1) = 2.$$

Тогда, с учетом (П.29), получаем, что

$$S(\partial\mathcal{E}_n) \leqslant F(n), \qquad n \geqslant 2, \tag{П.30}$$

где

$$F(1) = 2,$$
$$F(n) = F(n-1) \times k(n), \qquad n \geqslant 2,$$
$$k(n) = 2^{n-1} \frac{n\sqrt{n}}{(n-1)\sqrt{n-1}} \frac{\{(n-2)!\}^2}{(2n-3)!}.$$

Покажем, что $k(n) < 1$ при $n \geqslant 4$.

$$k(n) = 2^{n-1} \frac{n\sqrt{n}}{(n-1)\sqrt{n-1}} \frac{1 \times 2 \cdots (n-2)}{(n-1) \times n \cdots (2n-3)} =$$
$$= \frac{2\sqrt{n}}{(n-1)\sqrt{n-1}} \times \frac{2 \times 1}{n-1} \times \frac{2 \times 2}{n+1} \times \frac{2 \times 3}{n+2} \cdots \frac{2 \times (n-2)}{2n-3}. \tag{П.31}$$

В (П.31) всего $(n-1)$ сомножителей, и все из них меньше 1 при $n \geqslant n_0 = 4$.

Это означает, что $k(n) < 1$ и $F(n)$ в (П.30) является убывающей функцией при $n \geqslant 4$. Следовательно, при $n \geqslant 4$

$$S(\partial\mathcal{E}_n) \leqslant F(n) \leqslant F(4) = 2\sqrt{4} \times 4 \times V(\mathcal{E}_3) \approx 5{,}689.$$

С учетом (5) вторая часть теоремы 3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dzhafarov V., Büyükköroğlu T., Akyar H.* Stability Region for Discrete Time Systems and Its Boundary // Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN. 2021. V. 27. No. 3. P. 246–255.
2. *Fam A.T.* The volume of the coefficient space stability domain of monic polynomials // IEEE International Symposium on Circuits and Systems. 1989. P. 1780–1783.
3. *Akiyama S., Pethő A.* On the distribution of polynomials with bounded roots, I. Polynomials with real coefficients // J. Math. Soc. Japan. 2014. V. 66. No. 3. P. 927–949.
4. *Fam A.T., Meditch J.S.* A canonical parameter space for linear systems design // IEEE Transact. Autom. Control. 1978. V. 23. No. 3. P. 454–458.
5. *Zellner A.* An Introduction to Bayesian Inference in Econometrics. N.Y.: John Wiley & Sons, 1996.
6. *Farebrother R.W.* Simplified Samuelson Conditions for Cubic and Quartic Equations // Manchester School Econom. Soc. Studies. 1973. V. 41. No. 4. P. 396–406.
7. *Wedderburn J.H.M., Smiley M.F., Walker R.J.* Jacobian, Alternant // Amer. Math. Monthly. 1942. V. 49. No. 10. P. 694–696. https://www.jstor.org/stable/2302597

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Маликовым.

Поступила в редакцию 07.02.2024

После доработки 11.11.2024

Принята к публикации 25.11.2024