Автоматика и телемеханика, № 2, 2025

Стохастические системы

© 2025 г. **М.Е. ШАЙКИН, канд. техн. наук (shaykin@ipu.ru)**
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ЗАДАЧИ H^2/H_∞-ТЕОРИИ РЕГУЛЯТОРОВ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО ТИПА

Рассматриваются задачи теории H^2/H_∞-управления для динамических объектов, заданных линейными стохастическими уравнениями Ито, коэффициенты сноса и диффузии которых линейно зависят от вектора состояния, сигнала управления и внешнего возмущения. Выход регулируемого объекта задан двумя выходными сигналами, регулируемым z и наблюдаемым (в шумах) y. Регулятор оптимизируется по квадратическому H^2-критерию при условии ограниченности $\|H_{zv}\|_\infty < \gamma$ индуцированной нормы оператора H_{zv} передачи внешнего возмущения v на регулируемый выход z. К решению задачи условной H^2/H_∞-оптимизации привлекается теория дифференциальных игр.

Ключевые слова: H^2/H_∞-теория управления, диффузионное уравнение Ито, мультипликативная стохастическая система, индуцированная норма оператора, регулируемый выходной сигнал, регулятор по наблюдаемому выходному сигналу.

DOI: 10.31857/S0005231025020039, **EDN:** IQWNKG

1. Введение

В работе представлены результаты H^2/H_∞-теории управления нестационарными объектами, заданными стохастическими уравнениями Ито, коэффициенты сноса и диффузии которых линейно зависят от векторов состояния x, управления u и внешнего возмущения v. Это уравнения Ито вида

$$dx(t) = \varphi(t)dt + \Phi(t)dW(t), \quad \varphi = Ax + B_1u + B_2v, \qquad (1.1)$$
$$\Phi\, dW = A_0xdw_0 + B_{01}udw_1 + B_{02}vdw_2.$$

Такое специфическое строение коэффициентов сноса и диффузии дает основание называть уравнение (1.1) *мультипликативным* по каждой из трех переменных. Стохастические процессы $w_i(t)$, $i = 0, 1, 2$ предполагаются скалярными, что на самом деле не является ограничением. Не является ограничением и зависимость сноса $\varphi(t)$ и диффузии $\Phi(t)dW(t)$ от одного и того же возмущения $v(t)$. Наконец, процессы $w_i(t)$ предполагаются статистически зависимыми, не обязательно с единичной матрицей интенсивности.

Объект имеет два выходных сигнала – регулируемый z и наблюдаемый y:

$$\begin{cases} z(t) = C_1x(t) + D_{11}u(t) + D_{12}v(t), \\ y(t) = C_2x(t) + D_{21}u(t) + D_{22}v(t), \quad t \in [0, T]. \end{cases} \qquad (1.2)$$

В нестационарном случае матричные коэффициенты зависят от параметра времени t. Рассматриваются случаи конечного ($T < \infty$) и бесконечного ($T = \infty$) интервалов наблюдения $[0, T]$. Начальное условие для уравнения (1.1) обозначается x_0.

Наличие в теории регуляторов регулируемого и наблюдаемого выходных сигналов естественно при постановке практических задач. Уже на начальном этапе теории оптимизации пришлось различать LQR-задачи синтеза линейных *квадратических* регуляторов по полному выходному сигналу z и LQG-задачи синтеза *гауссовских* регуляторов по информации, содержащейся в частично наблюдаемом выходном сигнале y. Хорошо, однако, известно, что в этом последнем случае при наличии помех не всегда удается обеспечить требуемую *робастность* регулятора. Свойство робастности – вообще одно из фундаментальных требований при синтезе регулятора в современной теории H^2/H_∞-управления и особенно в теории так называемых *неопределенных* систем. Заметим, что проблема робастности при наличии помех как внешних, так и внутренних, свойственных неопределенному объекту, является важнейшей не только в теории синтеза регуляторов, но и в *задачах фильтрации*. Однако в этой статье задачи фильтрации не рассматриваются. Не затрагиваются также задачи оптимизации управления и фильтрации для *дискретных систем*. Здесь же считаем уместным обратить внимание читателя на сходство многих результатов детерминированной теории управления с некоторыми результатами стохастической H^2/H_∞-теории, особенно в части управления объектами с регулятором по вектору состояния, в разделе 2. Основная же тема работы – это стохастическая теория робастного управления системами вида (1.1)–(1.2).

Синтез регулятора H^2/H_∞-теории является задачей условной оптимизации по квадратическому критерию при условии ограниченности заданным числом $\gamma > 0$ операторной нормы $\|H_{zv}\|_\infty$ оператора H_{zv}, заданного в функциональном пространстве входных возмущений $v(\cdot)$ объекта и со значениями в функциональном пространстве регулируемых выходных сигналов $z(\cdot)$. Регулятор должен обеспечивать устойчивость замкнутой им системы и условие $\|H_{zv}\|_\infty < \gamma$ ограниченности индуцированной нормы. Описание такого класса регуляторов составляет в общей теории H^2/H_∞-управления подраздел, обозначаемый как H_∞-теория регуляторов.

В теории стационарных систем общепринято рассматривать класс регуляторов вида $u(t) = \mathcal{K}(t, x(\cdot)|_0^t)$, $t > 0$, где функция $\mathcal{K}$ измерима по Борелю и непрерывна по Липшицу от второго аргумента. Если $u(t) = Kx(t)$ и матрица $A + B_1K$ *устойчива* (так будем называть матрицу, устойчивую по Гурвицу), то рассматривают передаточную от v к z функцию

$$M(s) = (C_1 + D_1K)(sI - (A + B_1K))^{-1}B_2,$$

и в этом случае полагают $\|H_{zv}\|_\infty = \sup_{\omega \in R} \sigma(M(j\omega)I)$, где $\sigma(M(s))$ – наибольшее сингулярное число матрицы $M(s)$. Число $\|H_{zv}\|_\infty$, так определенное, называют также нормой Харди передаточной функции. Наличием ограничения $\|H_{zv}\|_\infty < \gamma$ обусловлена особенность условной, субоптимальной H^2/H_∞-теории по сравнению с теорией безусловной LQR-оптимизации по энергетическому, в данном случае, критерию оптимальности.

Введением понятия H_∞-управления теория регулирования и управления обязана Г. Зеймсу, опубликовавшему в 1981 г. работу [1]. Основные результаты теории H^2/H_∞-управления, полученные сначала для линейных стационарных систем, см., например, [2, 3], были в дальнейшем обобщены на нестационарные системы и сформулированы на пространственно-временном языке (языке пространства состояний), см. [4, 5]. Наиболее плодотворное обобщение теории H^2/H_∞-управления было получено в рамках теории *дифференциальных игр* [6], после чего стало возможным единообразное изучение нестационарных детерминированных и стохастических [7] систем, заданных на конечном интервале времени, и систем с ненулевыми начальными условиями для вектора состояния. Оказалось возможным изучение бесконечномерных динамических систем управления и даже некоторых типов нелинейных систем. Подробная литература по названным обобщениям H^2/H_∞-теории приводится в монографии [8], введение к разделу 3.2.

Переход от теории стационарных систем к теории систем нестационарных потребовал, естественно, обобщения многих понятий с частотного языка на язык пространственно-временной. Так, например, обычное определение устойчивой стационарной системы в ряде случаев оказалось удобным заменить на понятие системы экспоненциально устойчивой, устойчивой в смысле "вход–выход" или в другом каком-нибудь подходящем смысле. Используя какое-либо из этих определений, можно обобщить на нестационарный случай понятия стабилизируемой, наблюдаемой и т.п. нестационарной системы. Так, например, в нестационарном случае система $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$ называется стабилизируемой, если существует ограниченная матричная функция $K(t)$ такая, что система $\dot{x} = (A(t) + B(t)K(t))x$ экспоненциально устойчива. Еще пример: если $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$, $y = C(t)x + D(t)v$, то пара $(A(t), C(t))$ называется детектируемой, если существует ограниченная матричная функция $L(t)$ такая, что система $\dot{x} = (A(t) - L(t)C(t))x$ экспоненциально устойчива. Заметим, что необходимостью обобщения было вызвано и появление в H_∞-теории понятия индуцированной H_∞-нормы оператора вместо нормы матричной передаточной функции $H_{zv}(s), Re\, s > 0$.

Задача H^2/H_∞-управления в мультипликативном случае решалась в [9] для класса нединамических каузальных регуляторов по вектору $x(\cdot)$ состояния системы. Иными словами, регулятор отыскивался в виде $u(t) = K(t, x(\cdot)|_0^t)$, $t \geqslant 0$ и, более узко, в виде $u(t) = K(t)x(t)$. Объект управления в [9] был стохастический с диффузией ΦdW, мультипликативной по векторам состояния, управления и внешнего возмущения; случай чисто детерминированного объекта (с нулевой диффузией) не исключался. Но не был рассмотрен случай простой линейной диффузии вида $(\Phi\, dW)(t) = B(t)dW(t)$. В этой работе объект остается общим мультипликативным, но рассматривается и случай линейной диффузии. Относительно матричных коэффициентов формулы $z = C_1 x + D_{11} u + D_{12} v$ принимались предположения $D_{12} = 0$, $D'_{11} C_1 = 0$, $D'_{11} D_{11} = I$; в настоящей работе ослабляем эти ограничения, а в (1.2) обозначаем D_{11} как D_1 и D_{22} как D_2.

Прослеживается интересная связь между стохастической теорией конечномерных мультипликативных систем и детерминированной теорией матричных алгебр Ли. Приложения групп Ли к обыкновенным дифференциальным уравнениям широко известны, см., например, [10]. Но математический аппарат теории групп Ли может найти применение и при отыскании фундаментальных матриц стохастических мультипликативных уравнений и интегральных представлений для решений таких уравнений [11]. Фундаментальная матрица $\Phi(t, \tau)$ в этом случае является случайной функцией, а общее решение уравнения, возмущенного помехой $h(t)$, задается формулой

$$x(t) = \Phi(t, t_0) x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau) \circ dh(\tau),$$

в которой через $\circ dh$ обозначен дифференциал Стратоновича–Фиска. О дифференциале Стратоновича–Фиска см., например, [12].

Приведем небольшой список публикаций, тематически близких к задаче анализа систем рассматриваемого здесь мультипликативного типа. В [13] рассмотрена задача численной аппроксимации решения стохастического уравнения вида

$$dx_t = (Ax_t + f(x_t))dt + \sum_{i=1}^{n} (B_i x_t + g_i(x_t)) dw_i, \quad x(0) = x_0 \in R^d$$

с нелинейными функциями $f, g_i : R^d \to R^d$; матрицы $A, B_i \in R^{d \times d}$ принимают значения в матричной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ с коммутаторными соотношениями $[A, B] = 0$, $[B_i, B_j] = 0$ для всех i, j. Анализ численных алгоритмов нахождения решений так называемых экспоненциальных интеграторов [14] является активной областью исследований как мультипликативных уравнений, так и уравнений с аддитивными шумами [15, 16]. В [17] исследована среднеквадратическая устойчивость численных методов вычисления экспоненциальных интеграторов. Теоретико-групповые методы являются эффективными при численном интегрировании и стохастических уравнений с частными производными [18]. Из работ отечественных авторов отметим исследование бесконечномерного стохастически мультипликативного уравнения с операторами A, B, действующими в сепарабельном гильбертовом пространстве [19]. Предполагается, что оператор A порождает здесь полугруппу операторов $S(t)$, $t > 0$ класса C_0, что гарантирует корректность задачи Коши для невозмущенного уравнения $\dot{X}_t = AX(t)$.

Дадим краткое изложение плана статьи. В разделах 2, 3 дана сводка известных результатов теории H^2/H_∞-управления: с регулятором по состоянию в разделе 2, с регулятором по выходному сигналу в разделе 3. В разделе 4 излагается теория регулятора по выходу для линейных нестационарных стохастических систем с линейной гауссовской диффузией. Это $LEQG$-задача риск-сенситивного управления, обобщающая обычную LQG-задачу. Раздел 5 содержит материал об управлении стохастическими нестационарными системами с регулятором по состоянию в цепи обратной связи, раздел 6 – сведения о теории мультипликативных систем с динамическим регулятором по наблюдаемому выходному сигналу. В разделе 7 изложены элементы теории робастных стохастических систем. Заключительные замечания содержатся в разделе 8.

2. Элементы H^2/H_∞-теории объектов с регулятором по состоянию

Стандартная проблема детерминированной H^2/H_∞-теории как стационарных, так и нестационарных систем управления формулируется следующим образом: для заданного $\gamma > 0$ найти условно-оптимальное управление в классе всех допустимых регуляторов. Регулятор называем допустимым, если замкнутая им по обратной связи система устойчива и удовлетворяет условию $\|H_{zv}\|_\infty < \gamma$. В простом случае стационарной системы без управления

$$\dot{x} = Ax + Bv, \quad z = Cx, \quad x(0) = 0,$$

требование допустимости принимает следующий вид [20]: устойчива матрица A и ограничена норма $\|M(s)\|_\infty < \gamma$ передаточной функции $M(s) = C(sI - A)^{-1}B$. Согласно BR-лемме о вещественной ограниченности ($BR = Bounded\,Real$), см. [21], условию допустимости равносильно каждое из следующих двух утверждений: (i) существует матрица $\tilde{P} \succ 0$ такая, что $A'\tilde{P} + \tilde{P}A + \tilde{P}BB'\tilde{P} + C'C \prec 0$, (ii) уравнение Риккати $A'P + PA + PBB'P + C'C = 0$ имеет стабилизирующее (т.е. такое, что матрица $A + BB'P$ устойчива) решение $P \succeq 0$.

Если условия $(i), (ii)$ равносильны, то $P \prec \tilde{P}$ и, таким образом, $0 \preceq P \prec \tilde{P}$. Тем самым проверка допустимости регулятора сводится к проверке существования (и выполнения некоторых свойств) решений неравенств и/или уравнений Риккати. В случае нестационарных линейных систем алгебраическое уравнение Риккати уступает место дифференциальному уравнению, т.е. к левой части уравнения для P в (ii) добавляется производная по времени $\dot{P}$. Рассмотрим *теоретико-игровую* постановку H^2/H_∞-задачи условно-оптимального, в классе допустимых регуляторов, управления. Она основана на следующем наблюдении: для замкнутой системы при начальном условии $x(0) = 0$ ограничение $\|H_{zv}\|_\infty < \gamma$ выполнено тогда и только тогда, когда существует число $\varepsilon > 0$ такое, что для всех $v(\cdot) \in L_2[0, \infty)$ справедливо соотношение

$$J_\gamma(u, v) := \int_0^\infty (\gamma^2 \|v(t)\|^2 - \|z(t)\|^2) dt \geqslant \gamma^2 \varepsilon \int_0^\infty \|v(t)\|^2 dt. \tag{2.1}$$

В динамической игре первый игрок, конструктор регулятора, стремится минимизировать проигрыш $J_\gamma(u, v)$, выбирая наилучшее управление $u^*(\cdot)$, а второй игрок стремится его максимизировать, выбирая наименее благоприятное внешнее возмущение $v^*(\cdot)$. Оптимальное значение функционала $J_\gamma(u,v)$ в седловой точке в случае, когда $u(t)=K(t,x(\cdot)|_0^t)$, запишется в виде $\inf_u \sup_{v\in L_2[0,\infty)} J_\gamma(u,v)$. Таковы основные понятия и обозначения H_∞-теории регулятора по вектору состояния, если рассматривать детерминированные системы как стационарные, так и нестационарные.

Алгебраическое уравнение Риккати для P и дифференциальное уравнение с производной $\dot P$ в его левой части назовем ассоциированными друг с другом. Дифференциальное уравнение интересно теми решениями $P(\cdot)$, для которых каждая матрица $P(t)$ является неотрицательно определенной, $P(t)\succeq 0$, $t\geqslant 0$, и теми, для которых матричная функция $t\mapsto A(t)-BB'P(t)$ экспоненциально устойчива. Часто полезно перейти в уравнении объекта к новым переменным и оба ассоциированных уравнения Риккати, алгебраическое и дифференциальное, сопоставлять именно этому уравнению состояния в новых переменных. Проиллюстрируем это на простом примере детерминированной системы с управлением вида

$$\dot x = Ax + B_1u + B_2v,\quad z = C_1x + D_1u,\quad x(0)=0. \tag{2.2}$$

Пусть $G:=D_1'D_1\succ 0$, тогда $D_1'z=D_1'C_1x+D_1'D_1u$, откуда $u=\bar u-G^{-1}D_1'C_1x$, где $\bar u:=G^{-1}D_1'z$ – новый вектор управления. Заменяя в системе (2.2) $u(\cdot)$ на $\bar u(\cdot)$, запишем ее в виде

$$\dot x = \tilde A x + B_1\bar u + B_2 v,\quad z=\tilde C_1 x + D_1\bar u, \tag{2.3}$$

где $\tilde A = A - B_1G^{-1}D_1'C_1$, $\tilde C_1=(I-D_1G^{-1}D_1')C_1$. Матрица K решает исходную *минимаксную* задачу о регуляторе тогда и только тогда, когда $\tilde K := K + G^{-1}D_1'C_1$ решает теоретико-игровую задачу для (2.3) с вектором $\bar u(\cdot)$. При этом пара (A,B_1) стабилизируема тогда и только тогда, когда стабилизируема пара $(\tilde A, B_1)$. Основной результат применения теории дифференциальной игры к синтезу H_∞-регулятора по состоянию для линейного стационарного объекта сформулируем ниже в виде леммы 1. Будем рассматривать дифференциальное уравнение Риккати на бесконечном интервале ($t\in[0,\infty)$) с условием $X(T)=M$ для некоторой матрицы $M\succeq 0$ и некоторого $T<\infty$:

$$\begin{gathered}\dot X + (A-B_1G^{-1}D_1'C_1)'X + X(A-B_1G^{-1}D_1'C_1)+\\ + C_1'(I-D_1G^{-1}D_1')C_1 + X(B_1G^{-1}B_1'-\gamma^{-2}B_2B_2')X=0.\end{gathered} \tag{2.4}$$

Через $X_T(t)$ обозначим решение уравнения (2.4), отвечающее выбору $M=0$.

Лемма 1. Пусть пара $(\tilde A,\tilde C_1)$ детектируема. Тогда (i) $X_T(t)$ при каждом фиксированном t не убывает по T. (ii) Если существует решение $X\succeq 0$ алгебраического уравнения, с которым ассоциировано уравнение (2.4), тогда существует и минимальное такое решение, обозначаемое ниже через X^+. При этом $X^+\succeq X_T(t)$ для всех $T\geqslant 0$. А если пара $(\tilde A,\tilde C_1)$ еще и наблюдаема, тогда каждое решение $X\succeq 0$ алгебраического уравнения является и положительно определенным, $X\succ 0$. (iii) Если решение $X^+\succeq 0$ существует, *тогда, выбрав регулятор*

$$u^*(t) = K^*x(t), \quad K^* = -G^{-1}(B_1'X + D_1'C_1), \tag{2.5}$$

гарантированно получим равенство

$$\sup_{v\in L_2[0,\infty)} J_\gamma(K^*x, v) = x_0'X^+x_0. \tag{2.6}$$

Подробности см. в [22].

3. Регуляторы по выходному сигналу, зависящему от внешнего возмущения

Приведем теперь результаты работ [21, 23], касающиеся синтеза H^2/H_∞-регулятора по выходному сигналу $y(\cdot)$ для объекта

$$\dot{x} = Ax + B_1u + B_2v, \quad z = C_1x + D_1u, \quad y = C_2x + D_2v. \tag{3.1}$$

Здесь v – сигнал внешнего возмущения и $D_2 \neq 0$. Рассмотрим динамический регулятор с вектором состояния x_c вида

$$\dot{x}_c = A_cx_c + B_cy, \quad u = C_cx_c + D_cy. \tag{3.2}$$

Такой регулятор порождает расширенную систему с вектором состояния $\bar{x} :=$ $:= (x', x_c')'$. Если объект и динамический регулятор являются стационарными системами, то стационарной является и расширенная система, для которой передаточная функция $\tilde{H}_{zv}(s)$ от v к z равна

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{zv}(s) &= (C_1 + D_1D_cC_2 \quad D_1C_c) \times \\ &\times \left(sI - \begin{pmatrix} A + B_1D_cC_2 & B_1C_c \\ B_cC_2 & A_c \end{pmatrix}\right)^{-1} \begin{pmatrix} B_2 + B_1D_cD_2 \\ B_cD_2 \end{pmatrix} + D_1D_cD_2. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Она обобщает формулу для передаточной функции

$$H_{zv}^K(s) = (C_1 + D_1K)(sI - A - B_1K)^{-1}B_2 \tag{3.4}$$

замкнутой системы, получаемой при замыкании объекта (3.1) нединамическим регулятором вида $u(t) = K(t)x(t)$. Ниже понадобится и понятие инъективного отображения L выходного сигнала $y(\cdot)$, в некотором роде двойственное к понятию отображения K, задающего регулятор $u = Kx$. Сначала ограничимся условием $D_c = 0$. Рассмотрим систему без управления

$$\dot{x} = Ax + B_2v + Ly, \quad z = C_1x, \quad y = C_2x + D_2v. \tag{3.5}$$

Отображение L порождает передаточную функцию

$$H_{zv}^L(s) = C_1(sI - A - LC_2)^{-1}(B_2 + LD_2)$$

системы (3.5). Как отмечалось во Введении, отображение L тесно связано с определением детектируемой системы в нестационарном случае. Введенных понятий достаточно для того, чтобы сформулировать условия разрешимости задачи об H_∞-регуляторе по выходному сигналу.

Лемма 2. Пусть для объекта (3.1) при $D_c = 0$ существует регулятор (3.2) такой, что устойчива матрица состояния $\begin{bmatrix} A & B_1C_c \\ B_cC_2 & A_c \end{bmatrix}$ расширенной системы и ограничена норма Харди передаточной функции $\tilde{H}_{zv}(s)$ в (3.3), так что $\|\tilde{H}_{zv}(s)\|_\infty < 1$. Тогда 1) существуют матрица K регулятора $u = Kx$ по вектору состояния и матрица $X \succ 0$ такие, что удовлетворяется уравнение Риккати (2.4); при этом устойчива матрица $A + B_1K$ и ограничена норма Харди передаточной функции $H^K_{zv}(s)$ в (3.4), т.е. $\|H^K_{zv}(s)\|_\infty < 1$; 2) существуют матрица L инъективного отображения выходного сигнала и матрица $Y \succ 0$ такие, что

$$(A + LC_2)'Y + Y(A + LC_2) + YC_1'C_1Y + (B_2 + LD_2)(B_2 + LD_2)' \prec 0;$$

при этом устойчива матрица $A + LC_2$ и ограничена норма Харди передаточной функции $H^L_{zv}(s)$, так что $\|H^L_{zv}(s)\|_\infty < 1$. Матрица Y удовлетворяет уравнению Риккати

$$\begin{gathered}(A - B_2D_2'\Gamma^{-1}C_2)Y + Y(A - B_2D_2'\Gamma^{-1}C_2)' + B_2(I - D_2'\Gamma^{-1}D_2)B_2' - \\ -Y(C_2'\Gamma^{-1}C_2 - \gamma^{-2}C_1'C_1)Y = 0, \quad \Gamma := D_2D_2' \succ 0.\end{gathered} \tag{3.6}$$

Заметим, что это уравнение получается по принципу двойственности из (2.4) заменой коэффициентов A', B_1', C_1', D_1 на A, C_2, B_2, D_2' соответственно и, следовательно, заменой $G = D_1'D_1$ на $\Gamma = D_2D_2'$. При сформулированных в лемме 2 предложениях 1), 2) и дополнительных условиях о детектируемости пар $(A - B_1G^{-1}D_1'C_1, (I - D_1G^{-1}D_1')C_1)$ и (A, C_2) и о стабилизируемости пар (A, B_1) и $(A - B_2D_2'\Gamma^{-1}C_2, B_2(I - D_2'\Gamma^{-1}D_2))$ можно утверждать (см. [23, 24]), что если уравнения Риккати для X в (2.4) и для Y в (3.6) допускают минимальные решения $X^+ \succeq 0$ и $Y^+ \succeq 0$ соответственно и при этом $\rho(Y^+X^+) < \gamma^2$, тогда динамическая игра с системой уравнений (3.1) и функционалом $J_\gamma(\cdot,\cdot)$, определенным в (2.1), имеет конечное значение $\inf_u \sup_{v\in L_2} J_\gamma(Kx, v)$. Далее, оптимальный минимизирующий регулятор определяется уравнениями [22]

$$\begin{gathered}\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B_1u + B_2\hat{v} + (I - \gamma^{-2}Y^+X^+)^{-1}(Y^+C_2' + B_2D_2')\Gamma^{-1}(y - \hat{y}), \\ u^* = -G^{-1}(B_1'X^+ + D_1'C_1)\hat{x},\end{gathered}$$

где $\hat{v} = \gamma^{-2}B_2'X^+\hat{x}$, $\hat{y} = C_2\hat{x} + D_2\hat{v}$.

Замечание. Приведенные в лемме 2 результаты справедливы при $D_c = 0$. Если $D_c \neq 0$, то блок (11) в матрице состояния A_{cl} заменяется на $A + B_1D_cC_2$, см. (3.3), и для H_{zv} имеем $H_{zv} = C_{cl}(sI - A_{cl})^{-1}B_{cl} + D_{cl}$, где $B_{cl} = \begin{bmatrix} B_2 + B_1D_cD_2 \\ B_cD_2 \end{bmatrix}$, $C_{cl} = [C_1 + D_1D_cC_2 \;\; D_1C_c]$ и $D_{cl} = D_1D_cD_2$. Любопытно, что при $D_c \neq 0$ оптимальный минимизирующий регулятор совпадает с тем, который получен выше для случая $D_c = 0$, см. [21, 23].

4. H_∞-регуляторы по выходу для нестационарных систем с гауссовской диффузией

Системы с гауссовской (линейной) диффузией являются простейшими в классе линейных стохастических систем. Пусть

$$
\begin{aligned}
dx(t) &= (A(t)x(t) + B_1(t)u(t))dt + B_2(t)dW(t), \quad x(0) = x_0,\\
dy(t) &= C_2(t)x(t)dt + D_2(t)dW(t), \quad y(0) = y_0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T
\end{aligned}
$$

($(x(0), y(0))$, $W(t)$ обычно предполагаются независимыми). Если $(x(0), y(0))$ – гауссовский вектор, то $(x(t), y(t))$ – гауссовский процесс. Теорию регулятора по выходу $y(\cdot)$ будем строить, отправляясь от ее интерпретации как минимаксной теории LQG-управления по выходному сигналу [25]. В этой теории в качестве критерия принимается экспонента от квадратичного функционала [26, 27]:

$$
J_T(u) = 2\tau \log \mathsf{E} \exp \frac{1}{2\tau} \left[x'(T)Mx(T) + \int\limits_0^T F(x(t), u(t))dt \right],
$$

где $F(x, u)$ – квадратическая форма на пространстве пар векторов (x, u). Задача, как обычно, состоит в том, чтобы найти $\inf_{u(\cdot)} J_T(u(\cdot))$. Это задача риск-сенситивного управления, обозначаемая как $LEQG$-задача; в пределе при $\tau \to \infty$ получают обычную LQG-задачу риск-нейтрального управления. При произвольном τ регулятор получается в виде $u(t) = K\hat{x}(t)$, где $\hat{x}$ – фазовый вектор фильтра, оценивающего $x(t)$ по выходу $y(\cdot)$.

Обратим внимание на аналогию между результатами, изложенными в предыдущем разделе, и теми, которые излагаются ниже в этом разделе. Следует, однако, иметь в виду, что в разделе 3 были представлены преимущественно те результаты, которые касаются теории стационарных систем, заданных на бесконечном горизонте $0 \leqslant t < \infty$, а здесь – те, что относятся к нестационарным системам, определенным при $0 \leqslant t < T$, $T < \infty$. По этой причине алгебраические уравнения Риккати раздела 3 следует при сопоставлении результатов заменять на дифференциальные уравнения Риккати в этом разделе. Разумеется, завершенная теория систем обоих типов, детерминированных и стохастических гауссовских, охватывает как стационарные, так и нестационарные объекты.

Решение задачи управления в этом разделе дается при следующих предположениях. Во-первых, матрица квадратичной формы $F(x, u)$, зададим ее в виде $\begin{pmatrix} R(t) & \Upsilon(t) \\ \Upsilon(t)' & G(t) \end{pmatrix}$, удовлетворяет условию $R - \Upsilon G^{-1}\Upsilon' \succ 0$. Если определить регулируемый выход $z = C_1x + D_1u$ и положить $F(x, u) = z'z$ для прояснения аналогии с результатами предыдущего раздела, то получим $R - \Upsilon G^{-1}\Upsilon' = C_1'C_1 - C_1'D_1G^{-1}D_1'C_1 \succ 0$. Полагаем также $M \succeq 0$ и $\tau = \gamma^2$. Во-вторых, принимаем, что выполнены условия (i)–(iii), приводимые ниже в лемме 3.

Л е м м а 3. *Предположим, что* (*i*) *дифференциальное уравнение Риккати, ассоциированное с алгебраическим уравнением* (3.6), *удовлетворяющее начальному условию* $Y(0) = Y_0$, *имеет решение* $Y = Y'$ *такое, что* $Y(t) \succeq c_0 I$ *для некоторого* $c_0 > 0$ *и всех* $t \in [0, T]$; (*ii*) *дифференциальное уравнение Риккати, ассоциированное с алгебраическим уравнением* (2.4), *удовлетворяющее начальному условию* $X(T) = M$, *имеет решение* X *такое, что* $X(t) = X'(t) \succeq 0$ *для всех* $t \in [0, T]$; (*iii*) *для каждого* $t \in [0, T]$ *выполняется неравенство* $\rho(Y(t)X(t)) < \tau$, *означающее, что матрица* $I - \frac{1}{\tau}Y(t)X(t)$ *имеет только положительные собственные значения. Тогда оптимальное управление задается регулятором по состоянию в виде*

$$u^*(t) = -G^{-1}(B_1'(t)X(t) + \Upsilon'(t))\hat{x}(t),$$

где оценка $\hat{x}$ вектора состояния x по наблюдаемому выходному сигналу $y(\cdot)$ определяется *фильтром*

$$d\hat{x}(t) = \left(A - B_1 G^{-1}\Upsilon' - \left(B_1 G^{-1} B_1' - \frac{1}{\tau}B_2 B_2'\right) X\right)\hat{x}(t)dt +$$
$$+ \left(I - \frac{1}{\tau}YX\right)^{-1}(YC_2' + B_2 D_2')\Gamma^{-1}\left(dy(t) - \left(C_2 + \frac{1}{\tau}D_2 B_2' X\right)\hat{x}(t)\,dt\right).$$

Доказательство леммы 3 см. в [22, 28].

Новым аспектом теории является необходимость ответить на следующий вопрос: "Каков в данной теории класс допустимых регуляторов?". Требуется, чтобы в обозначениях $e(t) := x(t) - \hat{x}(t)$, $\epsilon(t) := e(t) + \frac{1}{\tau}YX\hat{x}(t)$ процесс

$$\alpha(t) := B_2' Y \epsilon(t) - D_2' \Gamma^{-1}(C_2 Y + D_2 B_2')Y^{-1}e(t)$$

порождал экспоненту

$$\zeta(t) = \exp\left\{\int_0^t \alpha'(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \|\alpha(s)\|^2 ds\right\},$$

являющуюся, как известно, см. [29], мартингалом на $[0, T]$. Для линейного регулятора, по крайней мере, это условие выполняется [28]. И тогда нетрудно проверить, что регулятор, в классе допустимых, который обоспечивает инфимум критерия оптимальности, является линейным.

Некоторых комментариев требует также обобщение приведенных в этом разделе результатов на случай систем с *бесконечным горизонтом*, $T = \infty$. Коэффициенты в уравнениях объекта при $T = \infty$ следует считать не зависящими от t и принять условие $y(0) = 0$, а функционал стоимости определить как $J(u) := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} J_T(u)$. Далее, дифференциальные уравнения Риккати следует заменить на алгебраические, а предположения (*i*)–(*iii*) в лемме 3 конкретизировать, заменив условие существования симметрического решения Y на пару следующих условий: (a) $R - \Upsilon G^{-1}\Upsilon' \succeq 0$ и (b) пара матриц $(A - B_1G^{-1}\Upsilon', R - \Upsilon G^{-1}\Upsilon')$ детектируема, а пара $(A - B_2D_2'\Gamma^{-1}C_2, B_2(I - D_2'\Gamma^{-1}D_2))$ стабилизируема. Кроме того, обозначения X и Y в лемме 3 надо будет заменить на общепринятые X_∞, Y_∞ и предположить, что $(i)'$ уравнение для Y допускает минимальное решение $Y_\infty \succ 0$, а $(ii)'$ уравнение для X допускает минимальное решение $X_\infty \succeq 0$. Доказывается, что X_∞ и Y_∞ можно получить как предельные при $T \to \infty$ значения соответственно для $X = X_T$ и $Y = Y_T$. Это составляет утверждение следующей леммы.

Лемма 4. *При условиях, сформулированных выше, справедливы следующие утверждения: (i) Ассоциированное с (2.4) дифференциальное уравнение при $M = 0$ имеет решение $X_T(t) \succeq 0$ такое, что $X_T(t) \to X_\infty$ при $T \to \infty$. (ii) Если $Y_\infty \succeq Y_0 \succ 0$, то ассоциированное с (3.6) дифференциальное уравнение при $M = 0$ имеет решение $Y(t; Y_0)$ такое, что $Y(t; Y_0) \to Y_\infty$ при $t \to \infty$. (iii) Для каждого $T > 0$ и $t \in [0, T]$ матрицы $Y(t; Y_0)$ и $X_T(t; M)$ удовлетворяют неравенству $\rho(Y(t)X(t)) < \tau$.*

См. [22, 28].

Лемма 4 доказывается следующим образом. Сначала проверяется, что при $M = 0$ решение $X_T(t) \succeq 0$ уравнения (2.4) сходится к X_∞ при $T \to \infty$. Для доказательства утверждения (ii) в лемме 4 рассматривается система

$$\dot{\eta} = A'\eta + C_2'\nu + R^{1/2}\omega, \quad \eta(0) = \eta_0; \quad \zeta = B_2'\eta + D_2'\nu,$$

где $\eta \in R^n$ – вектор состояния, $\nu \in R^l$ – управление, $\omega \in R^q$ – возмущение, $\zeta \in R^p$ – регулируемый выход, и определяются функционалы

$$\begin{aligned} \bar{J}_\tau^{T,Y_0}(\nu, \omega) &:= \eta(T)'Y_0\eta(T) + \int_0^T (\|\zeta(t\|^2 - \tau\|\omega(t)\|^2)dt, \\ \bar{J}_\tau(\nu, \omega) &:= \int_0^\infty (\|\zeta(t)\|^2 - \tau\|\omega(t)\|^2)\, dt,\ \omega \in L_2[0, T]. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Применяя затем теорию дифференциальных игр, заключают, что $\inf_\nu \sup_\omega \bar{J}_\tau(\nu, \omega) < \infty$ на бесконечном горизонте и что существует предел Y_∞ для уравнения (3.6) с решениями Y_T для каждого $T < \infty$. Таким образом, уравнение (3.6) имеет минимальное решение $Y_\infty \succ 0$, а тогда из леммы 1 в разделе 2 следует, что

$$\inf_\nu \sup_\omega \bar{J}_\tau(\nu, \omega) = \eta_0' Y_\infty \eta_0. \tag{4.2}$$

Наконец, так как переменные X^+ и Y_∞ двойственны, то и формула $\nu^* = -\Gamma^{-1}(D_2B_2' + C_2Y_\infty)\eta$ двойственна формуле (2.5), записанной в виде $u^* = K^*x(t)$, где $K^* = -G^{-1}(D_1'C_1 + B_1'X^+)$. И аналогично двойственны формулы (2.6) и (4.2). А вот неравенство $Y_\infty \succeq Y_0$ не имеет аналога в лемме 1. Но по формуле (4.1) из $Y_0 \preceq Y_\infty$ очевидным образом следует $\bar{J}_\tau^{T,Y_0} \preceq \bar{J}_\tau^{T,Y_\infty}$ при $\nu = \nu^*$, откуда и в этом случае получаем (4.2). См. [22, 28].

5. H_∞-регуляторы по состоянию для неопределенных стохастических систем

В этом разделе рассматриваются общая мультипликативная стохастическая система и регулятор по вектору состояния в цепи обратной связи. Управляемый объект задан уравнениями (1.1), (1.2), регулятор – уравнением $u(t) = Kx(t)$, уравнение состояния замкнутой системы – уравнением

$$dx = ((A + B_1K)x + B_2v)dt + A_0xdw_0 + B_{01}Kxdw_1 + B_{02}vdw_2. \tag{5.1}$$

Система (5.1) является неопределенной в силу зависимости ее динамики от искомого, пока неизвестного параметра K. Коэффициент при x в диффузионной компоненте этого уравнения, равный $A_0dw_0 + B_{01}Kdw_1$, можно записать в виде

$$([A_0\ 0] + [0\ B_{01}]K)dW_1, \quad dW_1 := \begin{pmatrix} dw_0 \\ dw_1 \end{pmatrix},$$

тем самым вместо трех винеровских процессов w_0, w_1, w_2 в (5.1) можно ограничиться двумя процессами W_1, w_2. Это означает, что можно, сохраняя прежние обозначения для матричных коэффициентов, просто положить в (5.1) $w_0 = w_1$:

$$dx = ((A + B_1K)x + B_2v)dt + (A_0 + B_{01}K)xdw_1 + B_{02}vdw_2. \tag{5.2}$$

Далее, вместо пары уравнений (1.2) можно, также без ограничения общности, принять

$$z(t) = C_1x(t) + D_1u(t), \quad y(t) = C_2x(t) + D_2v(t).$$

Замкнутую систему при $t \geqslant s$, где s – начальный момент времени,

$$dx = (A + B_1K)xdt + (A_0 + B_{01}K)xdw_1, \quad x(s) = h, \tag{5.3}$$

получаемую из (5.2) при $v(t) \equiv 0$, назовем номинальной. Эта система нестационарна даже при постоянных матричных коэффициентах в (5.2) и ее устойчивость следует понимать в смысле, например, экспоненциальной устойчивости в среднем квадратическом, если решение $x(t)$ желательно считать элементом пространства $L_2(s, \infty)$ функций, для которых $\int_s^\infty \|x(t)\|^2 dt < \infty$. В нестационарном случае следует подыскать подходящий аналог ограниченности $\|H_{zv}\|_\infty < \gamma$ индуцированной нормы оператора H_{zv}. Подходящим стохастическим аналогом ограниченности нормы является следующее условие: существует постоянная $\epsilon > 0$ такая, что при $x(s) = 0$

$$\mathsf{E}\int_s^\infty \left(\|(C_1 + D_1K)x(t)\|^2 - \gamma^2\|v(t)\|^2\right) dt \leqslant -\epsilon\gamma^2\mathsf{E}\int_s^\infty \|v(t)\|^2 dt \tag{5.4}$$

для каждого $v \in L_2(s, \infty)$. Заметим, что экспоненциальная устойчивость номинальной системы является *достаточным* условием того, чтобы уравнение (5.2) имело решения, принадлежащие $L_2(s, \infty)$ для любого $v \in L_2(s, \infty)$.

Теперь сформулируем задачу о стохастическом H_∞-регуляторе, решаемую в этом разделе: *для системы* (5.2) *найти матрицу K такую, чтобы номинальная система* (5.3) *была экспоненциально устойчивой в среднем квадратичном, а замкнутая система* (5.2) *удовлетворяла требованию* (5.4) *H_∞-ограниченности нормы оператора передачи H_{zv}*. Как и в разделе 2, наиболее плодотворным для стохастического случая явилось обращение к теории линейно-квадратичных дифференциальных игр, ассоциированных с мультипликативным уравнением Ито и функционалом $J(u,v) = \int_s^\infty \mathsf{E}(z'(t)z(t) - -\gamma^2\|v(t)\|^2)dt$. Связующим звеном между H_∞-теорией регулятора и теорией игр явилась здесь *стохастическая* BR-лемма, которую приведем ниже, следуя ее изложению в монографии [8].

Предположим, что система $dx(t) = Ax(t)dt + A_0x(t)dw_1(t)$, $x(s) = h$, отвечающая выбору $u(\cdot) \equiv 0$, $v(\cdot) \equiv 0$ в уравнении (5.2), экспоненциально устойчива (и, как следствие, устойчива матрица A) и существует постоянная ϵ_2, такая что $J_2(0,v) \leqslant -\epsilon_2 \int_0^\infty \|v(t)\|^2 dt$ для всех $v \in L_2(0,\infty)$. Тогда справедлива следующая стохастическая BR-лемма.

Лемма 5. 1-я часть (*существование*): (*a*) *для каждого $s \geqslant 0$ и для $h \in \in L_2(\Omega, \mathcal{F}_s, P)$ существует единственное возмущение $v_2^s(\cdot) \in L_2(s,\infty)$ такое, что $J(0, v_2^s(\cdot)) = \sup_{v \in L_2(s,\infty)} J(0,v)$.* (*b*) *Существует матрица $X_2 \succeq 0$ такая, что $\sup_{v \in L_2(s,\infty)} J(0,v) = \mathsf{E}\langle h, X_2 h\rangle$.* (*c*) *Для любого $T > 0$ существует единственное, при условии $X_{2T}(T) = 0$, решение $X_{2T}(\cdot) \succeq 0$ обобщенного уравнения Риккати*

$$\dot X_{2T} + A'X_{2T} + X_{2T}A + A_0'X_{2T} + R + X_{2T}B_2(I - B_{02}'X_{2T}B_{02})^{-1}B_2'X_{2T} = 0.$$

2-я часть (*минимаксное решение*): (*d*) *Наихудшее возмущение $v_{2T}^s(\cdot)$, максимизирующее функционал*

$$J_T(u,v) = \int_s^T \mathsf{E}(z'(t)z(t) - \gamma^2\|v(t)\|^2)dt, \quad s \leqslant T < \infty,$$

имеет вид

$$v_{2T}^s = (I - B_{02}'X_{2T}(t)B_{02})^{-1}B_2'X_{2T}(t)x_{2T}^s(t),$$

где $x_{2T}^s(\cdot)$ есть оптимальная траектория, являющаяся решением замкнутой системы

$$dx(t) = (A + B_2(I - B_{02}'X_{2T}(t)B_{02})^{-1}B_2'X_{2T}(t))x(t)dt + A_0x(t)dw_1(t) + \\ + B_{02}(I - B_{02}'X_{2T}(t)B_{02})^{-1}B_2'X_{2T}(t)x(t)dw_2(t), \quad x(s) = h.$$

(*e*) *Матрица X_2 в пункте* (*b*) *является также минимальным решением* обобщенного *уравнения Риккати*

$$A'X_2 + X_2A + A_0'X_2A_0 + R + X_2B_2(I - B_{02}'X_2B_{02})^{-1}B_2'X_2 = 0,$$

таким что $I - B_{02}'X_2(t)B_{02} \succ 0$.

Сформулируем теперь основную теорему раздела 5 для случая мультипликативной системы на бесконечном интервале времени.

Теорема 1. *Пусть выполнены предположения, при которых справедлива стохастическая BR-лемма. Предположим также, что $\|C_1x + D_1u\|^2 > > \epsilon_1\|u\|^2$ для некоторой $\epsilon_1 > 0$ и для всех $x \in R^n$, $u \in R^m$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(*a*) *Для $h \in L_2(\Omega, \mathcal{F}_s, P)$ и всех $s \geqslant 0$ существует единственная минимаксная пара для функционала $J(u, \upsilon)$.*

(*b*) *Существует единственное решение $X \succeq 0$ алгебраического уравнения Риккати*

$$
\begin{aligned}
A'X + XA + A_0'XA_0 + R + XB_2(I - B_{02}'XB_{02})^{-1}B_2'X -\\
- (XB_1 + A_0'XB_{01} + Q)(G + B_{01}'XB_{01})^{-1}(XB_1 + A_0'XB_{01} + Q)' = 0,
\end{aligned}
\tag{5.5}
$$

такое что $I - B_{02}'XB_{02} \succ 0$ и $V = \mathsf{E}\langle h, Xh\rangle$.

(*c*) *Минимаксная пара представляется в виде $u = F_1x$, $\upsilon = F_2x$, где*

$$
\begin{aligned}
F_1 =& - (G + B_{01}'XB_{01})^{-1}(XB_1 + A_0'XB_{01} + Q)',\\
F_2 =&(I - B_{02}'XB_{02})^{-1}B_2'X).
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

(*d*) *Замкнутая стохастическая система*

$$
dx = (A + B_1F_1 + B_2F_2)xdt + (A_0 + B_{01}F_1)xdw_1(t) + B_{02}F_2xdw_2(t)
\tag{5.7}
$$

с $x(s) = h$ экспоненциально устойчива в среднем квадратическом.

С полученными в теореме 1 выводами интересно сопоставить результаты решения такой же задачи на конечном горизонте [30]. Пусть

$$
J_T(u, \upsilon) = \int_s^T \mathsf{E}(z'(t)z(t) - \gamma^2\|\upsilon(t)\|^2)dt, \quad s \leqslant T < \infty.
$$

Рассмотрим стандартную задачу стохастического управления $\inf\limits_{u \in L_2[s,T]} J_T(u, 0)$. С этой задачей ассоциируется решение $X_{1T} \succeq 0$ обобщенного уравнения Риккати

$$
\begin{aligned}
\dot{X}_{1T} + A'X_{1T} + X_{1T}A + A_0'X_{1T}A_0 + R - (X_{1T}B_1 + A_0'X_{1T}B_{01} + Q) \times\\
\times (G + B_{01}'X_{1T}B_{01})^{-1}(X_{1T}B_1 + A_0'X_{1T}B_{01} + Q)' = 0, \quad X_{1T}(T) = 0.
\end{aligned}
\tag{5.8}
$$

Это уравнение имеет единственное решение $X_{1T} \succeq 0$, определяющее оптимальное управление

$$
u_{1T} = -(G + B_{01}'X_{1T}B_{01})^{-1}(B_1'X_{1T} + B_{01}'X_{1T}A_0 + Q')x.
$$

Решения X_{1T} и X_{2T} обоих дифференциальных уравнений Риккати позволяют решить минимаксную задачу управления по общему критерию $J_T(u, \upsilon)$ на *конечном горизонте*. В [8] доказана следующая

Т е о р е м а 2. *Пусть* $F(x,u) > \epsilon_1\|u\|^2$ *и* $J(0,v) \leqslant -\epsilon_2 \int_0^\infty \|v(t)\|^2 dt$ *для всех* $v \in L_2(0,\infty)$. *Тогда теоретико-игровая минимаксная задача с критерием* $J_T(u,v)$ *имеет седловую точку* $(u_T(\cdot), v_T(\cdot))$. *Дифференциальное уравнение Риккати*

$$\begin{aligned}&\dot X_T + A'X_T + X_TA + A_0'X_TA_0 + R - (X_TB_1 + A_0'X_TB_{01} + Q)\times\\ &\times(G + B_{01}'X_TB_{01})^{-1}(X_TB_1 + A_0'X_TB_{01} + Q)' +\\ &+X_TB_2(I - B_{02}'X_TB_{02})^{-1}B_2'X_T = 0, \quad X_T(T) = 0\end{aligned} \tag{5.9}$$

имеет единственное решение $X_T \succeq 0$. *Седловая точка игры представляется в виде* $u_T = F_{1T}x$, $v_T = F_{2T}x$, *где*

$$\begin{aligned}&F_{1T} = -(G + B_{01}'X_TB_{01})^{-1}(B_1'X_T + B_{01}'X_TA_0 + Q'),\\ &F_{2T} = (I - B_{02}'X_TB_{02})^{-1}B_2'X_T.\end{aligned}$$

Доказательство этой теоремы достаточно сложное, оно использует результаты ряда работ. См. [31–33].

Интересно сравнить уравнения Риккати (5.6) и (5.5): последнего слагаемого в правой части уравнения (5.6) не было в (5.5). Конечно, это объясняется тем, что уравнение (5.5) ассоциировалось с критерием $J_T(u,0)$, а (5.6) – с критерием $J_T(u,v)$. Появление слагаемого $X_TB_2(I - B_{02}'X_TB_{02})^{-1}B_2'X_T)^{-1}$ вполне естественно в задаче максимизации функционала $J_T(u,v)$ по второму аргументу.

Интересно также представление критерия $J_T(u,v)$ через функции u_T, v_T, определяющие седловую точку $(u_T(\cdot), v_T(\cdot))$. Предположим, что решение X_T уравнения (5.6) существует на интервале $[T-\alpha, T]$ и s – точка из этого интервала. Тогда, применяя формулу Ито к квадратической форме $x(t)'X_Tx(t)$, где $x(t)$ удовлетворяет уравнению (1.1) при ограничении $w_0 = w_1$, получаем

$$\begin{aligned}J_T(u,v) = &\mathsf{E}\int_s^T \|(I - B_{02}'X_TB_{02})^{\frac12}(v(t) - F_{2T}x(t))\|^2 dt +\\ &+\mathsf{E}\int_s^T \|(G + B_{01}'X_TB_{01})^{\frac12}(u(t) - F_{1T}x(t))\|^2 dt.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что седловая точка удовлетворяет условию

$$J_T(u_T, v) \leqslant J_T(u_T, v_T) = \mathsf{E}h'X_T(s)h \leqslant J_T(u, v_T).$$

При достаточно малом значении параметра α это условие используется для доказательства существования решения дифференциального уравнения Риккати (5.6) на конечном интервале $t \in [s,T]$.

6. H_∞-регуляторы по выходу для стохастических систем с мультипликативными возмущениями

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение Ито вида

$$
(6.1) \qquad \Sigma : \begin{cases} dx(t) = (Ax(t) + B_1 v(t) + B_2 u(t))dt + A_0 x(t) dw_0(t) + \\ +B_{01} v(t) dw_1(t) + B_{02} u(t) dw_2(t), \ x_0 \in \mathrm{R}^n, \\ z(t) = C_1 x(t) + D_{11} v(t) + D_{12} u(t), \\ y(t) = C_2 x(t) + D_{21} v(t), \quad t \in [0, T]. \end{cases}
$$

Регулятором в цепи обратной связи является детерминированная *динамическая* система с вектором состояния $\hat{x}$, заданная уравнениями

$$
(6.2) \qquad d\hat{x}(t) = A_k \hat{x}(t) dt + B_k\, y(t) dt, \quad u(t) = C_k \hat{x}(t) + D_k\, y(t)
$$

с матричными коэффициентами, пока не определенными.

Вектор состояния системы, замкнутой регулятором, обозначим через $\bar{x}$, полагая $\bar{x}' := (x', \hat{x}')$. Стохастическое уравнение для $\bar{x}$ получается как результат некоторых громоздких, но элементарных вычислений, и нетрудно убедиться, что функции $t \mapsto \bar{x}(t)$, $t \mapsto z(t)$ должны удовлетворять уравнениям

$$
(6.3) \qquad \Sigma_2 : \begin{cases} d\bar{x}(t) = A_{cl} \bar{x}(t)\, dt + B_{cl} v(t)\, dt + A^0_{cl} \bar{x}(t) dw_0(t) + \\ +B^0_{cl} v(t) dw_1(t) + A^1_{cl} \bar{x}(t)\, dw_2(t) + B^1_{cl} v(t)\, dw_2(t), \\ z(t) = C_{cl} \bar{x}(t) + D_{cl} v(t), \quad t \in [0, T]. \end{cases}
$$

Непосредственно устанавливаются формулы, выражающие коэффициенты уравнений замкнутой системы Σ_2. См., например, [34].

Основной результат теории динамического регулятора по выходному сигналу сформулируем в следующей теореме.

Т е о р е м а 3. *Для системы* (6.1) *и* $\gamma > 0$ *следующие утверждения равносильны:* (*i*) *Существует регулятор* (6.2) *такой, что замкнутая им система* (6.3) *внутренне устойчива и выполнено ограничение* $\|H_{zv}\|_\infty < \gamma$. (*ii*) *Существует матричная функция* $P : t \mapsto P(t) \prec 0$, *такая что* $\mathcal{M}(\gamma, P) \succ 0$ *для всех* $t \in [0, T]$.

См. теорему 3.3 в [7]. Здесь $\mathcal{M}(\gamma, P)$ – блочная 2×2-матрица квадратичной формы в пространстве пар векторов $\binom{\bar{x}}{v}$.

Для последующего удобно записать условие $\mathcal{M}(\gamma, P) \succ 0$ в эквивалентной форме, заменив блочно-диагональную матрицу $\mathrm{diag}\{\mathcal{M}(\gamma, P), I\}$ блочной 3×3 матрицей $T\mathcal{N}(\gamma, P)T' \succ 0$, где

$$
\mathcal{N}(\gamma, P) = \begin{pmatrix} PA_{cl} + A'_{cl}P + S_{11} & PB_{cl} + S_{12} & C'_{cl} \\ B'_{cl}P + S_{21} & \gamma^2 I + S_{22} & D'_{cl} \\ C_{cl} & D_{cl} & I \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} I & O & -C'_{cl} \\ O & I & -D'_{cl} \\ O & O & I \end{pmatrix}.
$$

Матрицы S_{ij} определены в [34]. Для блоков-подматриц N_{ij} неотрицательно определенной матрицы $\mathcal{N}(\gamma, P)$ там получены формулы

$$N_{11} = P(A^0 + B^I M_k C^I) + (A^0 + B^I M_k C^I)' P + S_{11},$$
$$N_{12} = P(B^0 + B^I M_k D_{21}^0 + S_{12}), \quad N_{13} = (C^0 + D_{12}^0 M_k C^I)',$$
$$N_{22} = \gamma^2 I + S_{22}, \quad N_{23} = (D_{11} + D_{12}^0 M_k D_{21}^0)', \quad N_{33} = I,$$

где $M_k = \begin{pmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{pmatrix}$ – матрица параметров динамического регулятора. Матрицы A_{cl}, B_{cl}, C_{cl}, D_{cl} получают представление через матрицу M_k; соответствующие формулы имеют вид аффинных относительно M_k соотношений

$$A_{cl} = A^0 + B^I M_k C^I, \quad B_{cl} = B^0 + B^I M_k D_{21}^0,$$
$$C_{cl} = C^0 + D_{12}^0 M_k C^I, \quad D_{cl} = D_{11} + D_{12}^0 M_k D_{21}^0$$

с некоторыми матричными коэффициентами [30]. Представим матрицу $\mathcal{N}(\gamma, P)$ в виде суммы матрицы $\mathcal{H}$, от M_k не зависящей, и двух матриц, линейно зависящих от M_k. Получим сумму $\mathcal{H} + \mathcal{Q}' M_k' \mathcal{R} + \mathcal{R}' M_k \mathcal{Q}$ с некоторыми матрицами $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{R}$ и неотрицательно определенной матрицей $\mathcal{H}$. Согласно полученному в [7] стохастическому обобщению *леммы о проекции* из теории линейных матричных неравенств (см. [35]), *линейное матричное неравенство*

$$\mathcal{H} + \mathcal{Q}' M_k' \mathcal{R} + \mathcal{R}' M_k \mathcal{Q} \succ O$$

имеет решение M_k тогда и только тогда, когда матрица $\mathcal{H}$ является положительно определенной на нулевых подпространствах $ker\mathcal{Q}$ и $ker\mathcal{R}$ матриц $\mathcal{Q}, \mathcal{R}$.

Лемма о проекции дает необходимое и достаточное условие выполнимости условия $\|H_{zv}\|_\infty < \gamma$. Условие формулируется не на языке теории матричных дифференциальных уравнений, а на языке нелинейных *матричных неравенств*. Лемма не только решает вопрос об условиях допустимости регулятора M_k, но и позволяет вычислить значения A_k, B_k, C_k, D_k параметров регулятора, если они неизвестны [7].

7. Стохастический робастный анализ системы с параметрическим возмущением

Пусть

$$dx(t) = Ax(t)dt + A_0 x(t) dw_1(t), \quad 0 < t < T \tag{7.1}$$

– номинальная стохастическая система и

$$dx(t) = (A + B\Delta C)x(t)dt + A_0 x(t) dw_1(t) + B_0 \Delta C x(t) dw_2(t) \tag{7.2}$$

– ее *стохастическое* возмущение с одновременным *параметрическим* возмущением матричного параметра A. В системе (7.2) возмущающим параметром является произвольная матрица Δ из множества $\mathcal{D} = R^{l \times q}$ матриц размера $l \times q$. Номинальная система (7.1), являясь нестационарной, предполагается устойчивой в следующем смысле: существует постоянная $c > 0$ такая, что $\mathsf{E}\int_0^\infty \|x(t)\|^2 dt \leqslant c\|x^0\|^2$, где $x(\cdot) = x(\cdot, x^0)$ – траектория уравнения (7.1), начинающаяся в $x^0 \in R^n$. Винеровские процессы w_1, w_2 независимы, возмущающая сила является процессом, мультипликативным по состоянию, величина неопределенности системы (7.2) измеряется нормой $\|\Delta\|$ матрицы Δ.

Пусть $\rho > 0$ – малое число. При малых $\|\Delta\| < \rho$ система (7.2) близка к невозмущенной (7.1) и, скорее всего, тоже устойчива. Интересно знать, каково значение ρ_{max} параметра ρ, при котором для каждого Δ из множества $\mathcal{D} = \{\Delta : \|\Delta\| < \rho_{\max}\}$ гарантируется устойчивость системы (7.2)? Число $\rho_{\max}$ естественно называть радиусом *робастной* устойчивости системы (7.1) относительно неопределенностей $\Delta \in \mathcal{D}$. В соответствии с этим вводится следующее определение: число $r_{\mathcal{D}} = \inf\{\|\Delta\|$: система (7.2) с неопределенностью Δ неустойчива$\}$ называется радиусом робастной устойчивости системы (7.1).

Ниже, чтобы связать задачу о робастной устойчивости с задачей анализа H_∞-теории (в основе анализа лежит стохастическая BR-лемма о вещественной ограниченности), обратимся к стандартному объекту билинейной стохастической H_∞-теории:

$$(7.3) \qquad \begin{cases} dx(t) = Ax(t)dt + Bv(t)dt + A_0x(t)dw_1(t) + B_0v(t)dw_2(t), \\ z(t) = Cx(t). \end{cases}$$

Интерпретируя v как управление, рассмотрим в цепи обратной связи блок с входным сигналом z и выходным сигналом $v = \Delta z$. Замкнутая система примет вид возмущенной системы (7.2). С этой системой в H_∞-теории ассоциируется оператор возмущения $L : v \mapsto z$, задающий действие внешнего возмущения (здесь – управления) v на выходной сигнал z. Оператор L действует из пространства функций $v(\cdot)$ в пространство функций $z(\cdot) = Cx(\cdot)$, где $x(\cdot) = x(\cdot, v, x^0)|_{x^0=0}$. Таким образом, $L : v(\cdot) \mapsto Cx(\cdot, v, 0)$.

Приведенное определение радиуса робастной устойчивости обобщается на нестационарные и нелинейные неопределенности. Пусть $\Delta(t, \cdot)$ при каждом $t \in R_+$ является отображением $R^q \to R^l$, которое линейно ограничено, т.е. $\|\Delta(t, y)\| \leqslant K\|y\|$ при некотором $K > 0$ для всех $t \in R_+$ и $y \in R^q$, и ограничено по Липшицу, т.е. для любого $T > 0$ найдется постоянная $L(T)$ такая, что $\|\Delta(t, y_1) - \Delta(t, y_2)\| \leqslant L(T)\|y_1 - y_2\|$ для всех $y_1, y_2 \in R^q$ и всех $t \in [0, T]$. Неопределенность Δ такого вида является нелинейной и нестационарной. Величина ее находится как наименьшее K в определении линейной ограниченности, а уравнение, ассоциированное с такой неопределенностью, записывается в виде

$$(7.4) \quad dx(t) = (Ax(t) + B\Delta(t, Cx(t)))dt + A_0x(t)dw_1(t) + B_0\Delta(t, Cx(t))dw_2(t).$$

Пусть $\mathcal{D}_{tn}$ – множество всех таких неопределенностей. Решение уравнения (7.4), по предположению единственное в классе случайных функций $L^2([0, T]; L^2(\Omega, R^n))$, обозначим через $x_\Delta(\cdot, x^0)$ и систему (7.4) назовем устойчивой, если ее решения удовлетворяют условию $\int_0^\infty \mathsf{E}\|x_\Delta(t, x^0)\|^2 dt \leqslant c\|x^0\|^2$

для некоторой постоянной c. В H_∞-теории требуется обеспечить $\|L_{z\upsilon}\| < \gamma$, а в теории робастных систем – обеспечить $\|\Delta_{\upsilon z}\| < \rho$. Значение параметра γ выбираем как можно меньшим, значение ρ – как можно большим.

В силу условий линейной и липшицевой ограниченности функции Δ уравнение (7.4) имеет единственное решение $x_\Delta(\cdot, x^0)$, являющееся стохастическим процессом с ограниченными вторыми моментами [36]. В интегральной форме уравнение (7.4) записывается в виде

$$x_\Delta(t) = x^0 + \int\limits_0^t (Ax_\Delta(s) + B\upsilon_\Delta(s))ds + \int\limits_0^t [A_0 x_\Delta(s)\ B_0\upsilon_\Delta(s)]dw(s), \quad t \in [0, T]$$

для каждого $T > 0$, где $\upsilon_\Delta(\cdot) = \Delta(\cdot, Cx_\Delta(\cdot)), w(s) = [w_1(s),\, w_2(s)]'$. Пусть $\|\Delta\| < \|L_{z\upsilon}\|^{-1}$, тогда существует число $\gamma > \|L_{z\upsilon}\|$ такое, что $\gamma\|\Delta\| < 1$. В H_∞-теории для функционала

$$J_T(x^0, \upsilon) = \int\limits_0^T \mathsf{E}[\gamma^2\|\upsilon(t)\|^2 - \|z(t)\|^2]dt$$

известна формула

$$\begin{aligned} J_T(x^0, \upsilon) = \langle x^0, P(0)x^0\rangle - \mathsf{E}\langle x(T), P(T)x(T)\rangle &+ \\ + \int\limits_0^T \mathsf{E}\Big\langle \begin{pmatrix} x(t) \\ \upsilon(t) \end{pmatrix}, M(P(t)) \begin{pmatrix} x(t) \\ \upsilon(t) \end{pmatrix} \Big\rangle dt. \end{aligned} \tag{7.5}$$

Согласно стохастической BR-лемме для любого $\gamma > 0$ равносильны утверждения: (i) существует матрица $P \prec 0$, такая что $M(P) \succ 0$, и (ii) уравнение для $x(\cdot)$ внутренне устойчиво, при этом $\|L_{z\upsilon}\| < \gamma$. Из $M(P) \succ 0$ следует $M(P) \succeq \delta^2 I$ для некоторого числа $\delta > 0$. Вычисляя $J_T(x^0, \upsilon)$ в (7.5) для $x(\cdot) = x_\Delta(\cdot, x^0)$ и $\upsilon(\cdot) = \upsilon_\Delta(\cdot)$, находим

$$J_T(x^0, \upsilon_\Delta) = \int\limits_0^T \mathsf{E}[\gamma^2\|\Delta(t, Cx_\Delta(t))\|^2 - \mathsf{E}\|Cx_\Delta(t)\|^2]dt. \tag{7.6}$$

Сформулируем теперь важный результат об устойчивости неопределенной системы (7.4).

Т е о р е м а 4. *Пусть при* $\Delta = 0$ *система* (7.1) *устойчива и при* $\Delta \neq 0$ *неопределенность* Δ *удовлетворяет условию* $\|\Delta\| = \sup\{\|\Delta(t, y)\|/\|y\| : t > 0, y \in R^q, y \neq 0\} < \|L\|^{-1}$ (*здесь* $L = L_{z\upsilon}$). *Тогда возмущенная* (*неопределенная*) *система* (7.4) *устойчива. В частности,* $r_{\mathcal{D}_{tn}} \geqslant \|L\|^{-1}$.

Действительно, поскольку

$$\gamma^2\|\Delta(t, Cx_\Delta(t)\|^2 \leqslant \gamma^2\|\Delta\|^2\|Cx_\Delta(t)\|^2 \leqslant \gamma^2\|Cx_\Delta(t)\|^2$$

в силу условия $\|L\|\|\Delta\| < \gamma\|\Delta\| < 1$, из (7.6) получаем $J_T(x^0, \upsilon_\Delta) \leqslant 0$. Аналогично, вычисляя в правой части формулы (7.5), записанной для $x(\cdot) = x_\Delta(\cdot, x^0)$ и $\upsilon(\cdot) = \upsilon_\Delta(\cdot)$, интеграл от квадратичной формы с матрицей $M(P) \succeq \delta^2 I$, находим следующую его оценку:

$$\int\limits_0^T \delta^2 \mathsf{E}\{\|x_\Delta(t)\|^2 + \|\upsilon_\Delta(t)\|^2\}dt \geqslant \int\limits_0^T \delta^2 \mathsf{E}\|x_\Delta(t)\|^2 dt.$$

Тем самым из (7.5) для $x(\cdot) = x_\Delta(\cdot, x^0)$ и $\upsilon(\cdot) = \upsilon_\Delta(\cdot)$ получаем неравенство

$$\mathsf{E}\langle x_\Delta(T), (-P)x_\Delta(T)\rangle \leqslant \langle x_0, (-P)x_0\rangle - \int\limits_0^T \delta^2 \mathsf{E}\|x_\Delta(t)\|^2 dt$$

для любого $T > 0$. В этом неравенстве левая часть положительна в силу $-P \succ 0$, поэтому $\int_0^T \delta^2 \mathsf{E}\|x_\Delta(t)\|^2 dt \leqslant \|P\|\|x^0\|^2/\delta^2$. Это доказывает, что система (7.4) устойчива.

Теперь нетрудно убедиться, что возмущенная, замкнутая обратной связью система, полученная подстановкой $\upsilon = \Delta z$ в уравнение (7.3), может быть приведена к виду

$$d\bar{x}(t) = (A_{cl} + B_{cl}\Delta C_{cl})\bar{x}(t)dt + \left(A_{cl}^0 dw_1(t) + B_{cl}^0 \Delta C_{cl} dw_2(t)\right)\bar{x}(t)$$

($\bar{x} := (x, \hat{x})$) с легко вычисляемыми коэффициентами, отмеченными нижним индексом *cl* от *closed*. Отсюда и из теорем 3 и 4 непосредственно следует

Лемма 6. *Пусть γ_{opt} есть инфимум тех $\gamma \geqslant 0$, для которых существует динамический регулятор, обеспечивающий внутреннюю устойчивость замкнутой системы* (7.4) *и выполнение для нее условия $\|L_{cl}\| < \gamma$. Тогда для любого $\gamma > \gamma_{opt}$ найдется регулятор Δ такой, что замкнутая им система* (7.4) *имеет радиус робастной устойчивости $r_{\mathcal{D}}(A_{cl}, B_{cl}, C_{cl}, A_{cl}^0, B_{cl}^0) > \gamma^{-1}$.*

Подробности см. в [7].

8. Заключение

Темой статьи заявлен раздел H^2/H_∞ общей теории управления техническими системами. В этом разделе решаются, во-первых, задачи *анализа* регулятора и, во-вторых, – задачи его *синтеза*, т.е. его оптимизации в классе *допустимых*, выявленном на этапе анализа. Теория H_∞ решает задачу подавления внешнего возмущения, действующего на объект, замкнутый допустимым регулятором. Допустимый регулятор обеспечивает, во-первых, устойчивость замкнутой им системы “объект плюс регулятор” и, во-вторых, гарантирует, что норма оператора H_∞ передачи внешнего возмущения υ на регулируемый выходной сигнал z не превысит величины $\gamma > 0$, априори заданной конструктором: $\|H_{z\upsilon}\|_\infty < \gamma$. Регулятор предполагается заданным в виде функционального отображения $K : y \mapsto u$ наблюдаемого, измеренного шумовым датчиком, выходного сигнала y на сигнал управления u. В такой постановке задачи система должна иметь два входа v, u и два выхода z, y. Далее, система должна быть стохастической, заданной стохастическим уравнением Ито, диффузионный член которого не произволен, а имеет частную, мультипликативную структуру, которая, однако, не то же, что структура в линейном уравнении Ито. Стохастический характер системы обусловлен не только тем, что стохастическими являются внешнее возмущение и/или наблюдаемый выход. Даже номинальная, невозмущенная, при нулевых внешних возмущениях система предполагается стохастической. Стандартной же моделью стохастической системы является в H_∞-теории возмущенная система. И возмущена номинальная система двумя стохастическими силами: силой $B_1 v dt$ (которая может быть и детерминированной) и собственно стохастической силой $B_0 v dw_2$. Наличие обоих типов возмущений – существенный момент наиболее полного обобщения H_∞-теории. Так обстоит дело с постановкой задачи об H_∞-регуляторе в статистической теории H^2/H_∞-управления.

С другой стороны, в теории робастного управления занимаются исследованием систем с неопределенностями, их робастной устойчивостью, определением радиуса устойчивости замкнутой регулятором системы. Возникает вопрос: “В каком отношении находятся друг к другу теории о регуляторе для стохастических систем в робастном управлении и в H_∞-теории?”. Подробный ответ на этот вопрос дан в разделе 7 статьи. Оказывается, в H_∞-теории интерес представляют оператор $H_{zv} : v \mapsto z$ и его индуцированная норма, в робастной же теории – оператор $\Delta : z \mapsto v$ и его норма $\|\Delta\|$, играющая решающую роль в определении радиуса устойчивости системы с неопределенностями. Различные аспекты линейной теории стохастических робастных систем отражены в монографии [37].

Изложенная в обзоре теория мультипликативных стохастических систем является некоторым обобщением линейной теории, поскольку диффузионный член в уравнении состояния взят здесь мультипликативным, а не линейным. Нестандартный подход к теории гауссовских систем изложен в разделе 4 этой статьи. Следует отметить и интересные, представленные в обзоре результаты стохастической теории регуляторов по наблюдаемому выходному сигналу y. Здесь приходится перейти к расширенной системе с вектором состояния $\bar{x} = (x, \hat{x})$, где $\hat{x}$ – вектор состояния регулятора, вычисляемый по выходу y. После этого теорию такого регулятора интересно сопоставить с теорией детерминированного регулятора и регулятора по вектору состояния x.

Обратим внимание на возможные направления дальнейшего развития стохастической теории H^2/H_∞-управления и ее обобщений: назовем работы по теории управления для стационарных систем с ограниченными спектральными характеристиками [38], некоторых классов нелинейных систем [39], как робастных [40], так и неробастных, систем с негауссовскими неопределенностями [41], с неполной информацией о векторе состояния [42, 43] . Продолжаются работы по теории управления дискретными системами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Zames G.* Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative seminorms, fnd approximate inverses // IEEE Trans. Automat. Control. 1981. V. AC-26. P. 301–320.
2. *Doyle J., Glover K., Khargonekar P.P., Francis B.* State space solutions to standard H_2 and H^∞ control problems // IEEE Trans. Automat. Control. 1989. V. AC-34. P. 831–847.
3. *Francis B.A.* A course in H_∞ control theory. Lecture Notes in Control and Infofmation Sciences. V. 88. New York: Springer-Verlag, 1987.
4. *Doyle J., Zhou K., Glover K., Bodenheimer B.* Mixed H^2 and H_∞ performance objectives II: Optimal control // IEEE Trans. Automat. Control. 1994. V. 39. P. 1575–1587.
5. *Glover K., Doyle J.* State-space formulae for all stabilizing controllers that satisfy an H_∞ norm bound and relations to risk sensitivity // Syst. Contr. Lett. 1988. V. 11. P. 167–172.
6. *Limebeer D.J.N., Anderson B.D.O., Khargonekar, Green M.* A Game Theretic Approach to H_∞ Control for Time-Varying Systems // SIAM J. Control Optim. 1992. V. 30. P. 262–283.
7. *Hinrichsen D., Pritchard A.J.* Stochastic H_∞ // SIAM J. Control Optim. 1998. V. 36. No. 5. P. 1504–1538.
8. *Petersen I.R., Ugrinovsky V.A., Savkin F.V.* London: Springer, 2006.
9. *Шайкин М.Е.* Мультипликативные стохастические системы. Оптимизация и анализ // Дифференциальные уравнения. 2017. Том 53. № 3. С. 1–16.
10. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений М.: Наука, 1978.
11. *Шайкин М.Е.* Резольвенты дифференциальных уравнений Ито, мультипликативных по вектору состояния // АиТ. 2023. Т. 59. № 12. С. 171–190.
12. *Ватанабэ С., Икеда Н.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы М.: Наука, 1986.
13. *Erdogan U., Lord G.J.* A New Class of Exponential Integrators for Stochastic Differential Equations with Multiplicative Noise // arXiv:1608.07096v2. 2016.
14. *Hochbruck M., Ostermann A.* Exponential Integrators // Acta Numerica. 2010. No. 19. P. 209–286.
15. *Mora C.M.* Weak Exponential Schemes for Stochastic Differential Equations with Additive Noise // IMA J. Numer. Anal. 2005. V. 25. No. 3. P. 486–506.
16. *Jimenez J.C., Carbonell F.* Convergence Rate of Weak Local Linearization Schemes for Stochastic Differential Equations with Additive Noise // J. Comput. Appl. Math. 2015. V. 279. P. 106–122.
17. *Komori Y., Burrage K.* A Stochastic Exponential Euler Scheme for Simulation of Stiff Biochemical Reaction Systems // BIT. 2014. V. 54. No. 4. P. 1067–1085.
18. *Lord G.J., Tambue A.* Stochastic Exponential Integrators for the Finite Element Discretization of SPDEs for Multiplicative and Additive Noise // IMECO. Numer. Anal. 2012. drr059.
19. *Мельникова И.В., Альшанский М.А.* Стохастические уравнения с неограниченным операторным коэффициентом при мультипликативном шуме // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58. № 6. С. 1354–1371.

20. *Green M., Limebeer D.J.N.* Linear Robust Control / NJ. Prentice-Hall. Englewood Cliffs, 1995.

21. *Petersen I.R., Anderson B.D.O., Jonckheere E.A.* A first principles solution to the non-singular H^∞ control problem // Int. J. Robust Nonlin. Control. 1991. V. 1. No. 3. P. 171–185.

22. *Basar T., Bernhard P.* H^∞-optimal control and related minimax design problems: a dynamic game approach Boston. Birkhauser. 1995.

23. *Sampei M., Mita T., Nakamichi M.* An algebraic approach to H^∞ output feedback control problems // Syst. Control Lett. 1990. V. 14. P. 13–24.

24. *Bernstein D.S., Haddad W.M.* Robust stability and performance analysis for state-space systems via quadratic Lyapunov bounds // SIAM J. Matrix Anal. 1990. V. 11. No. 2. P. 239–271.

25. *Runolfsson T.* The equivalence between infinite-horizon optimal control of stochastic systems with exponential-of-integral performance index and stochastic differential games // IEEE Trans. Automat. Control. 1994. V. 39. No. 8. P. 1551–1563.

26. *Jacobson D.H.* Optimal stochastic linear systems with exponential performance criteria and their relation to deterministic differential games // IEEE Transact. Autom. Control. 1973. V. 18. No. 2. P. 124–131.

27. *Bensoussan A., van Schuppen J.H.* Optimal control of partially observable stochastic systems with an exponential-of-integral performance index // SIAM J. Control. Optim. 1985. V. 23. P. 599–613.

28. *Pan Z., Basar T.* Model simplification and optimal control of stochastic singularly perturbed systems under exponentiated quadratic cost // SIAM J. Control. Optim. 1996. V. 34. No. 5. P. 1734–1766.

29. *Гирсанов И.В.* О преобразовании одного класса случайных процессов с помощью абсолютно непрерывной замены меры // Теория вероятн. и ее применение. 1960. Т. 5. № 3. С. 314–330.

30. *Zhou K., Doyle J., Glover J.* Robust and Optimal Control. NJ. Prentice-Hall. Upper Saddle River. 1996.

31. *Ugrinovskii V.A., Petersen I.R.* Absolute stabilization and minimax optimal control of uncertain systems with stochastic uncertainty // SIAM J. Control Optim. 1999. V. 37. No. 4. P. 1089–1122.

32. *Ichikawa A.* Quadratic games and H_∞-type problems for time varying systems // Int. J. Contr. 1991. V. 54. No. 5. P. 1249–1271.

33. *Bensoussan A.* Stochastic control of partially observable systems Cambridge. Cambridge University Press, 1992.

34. *Шайкин М.Е.* Анализ динамического регулятора по выходному сигналу для стохастических систем мультипликативного типа // АиТ. 2021. Т. 57. № 3. С. 122–134.

35. *Gahinet P., Apkarian P.* A Linear Matrix Inequality Approach to H^∞ Control // Int. J. Robust Nonlin. Control. 1994. V. 4. P. 421–448.

36. *Крылов Н.В.* Управляемые процессы диффузионного типа. М.: Наука, 1977.

37. *Dragan V., Morozan T., Stoica A.M.* Mathematical methods in robust control of linear stochastic systems. Mathematical concepts and methods in science and engineering. SPRINGER, 2006.

38. *Ma P., Zhu Z., Sheng L.* Static output feedback H^2/H_∞ control with spectrum constraints for stochastic systems // Syst. Sci. Control Eng. 2018. V. 6. No. 3. P. 118–125.

39. *Paulson J.A., Mesbah A.* An efficient method for stochastic optimal control with joint chance constraints for nonlinear systems // Int. J. Robust Nonlin. Control. 2019. V. 29. No. 15. P. 5017–5037.

40. *Lefebvre T., De Belie F., Crevecoeur G.* A framework for robust quadratic optimal control // Opt. Control Appl. Methods. 2020. V. 41. No. 3. P. 833–848.

41. *Wan Y., Shen D.E., Lusia S., Findeisen R., Braatz R.D.* Polinomial chaos-based H^2 output-feedback control of systems with probabilistic parameter uncertainties // Automatica. 2021. V. 131. Article 109743.

42. *Пантелеев А.В., Яковлева А.А.* Синтез H_∞-регуляторов на конечном промежутке времени // Моделирование и анализ данных. 2021. Т. 11. № 1. С. 5–19.

43. *Wang M., Meng Q., Shen Y., Shi P.* Stochastic H^2/H_∞-Control for Mean-Field Stochastic Differential Systems with (x, u, v)-Dependent Noise // J. Optim. Theory Appl. 2019. Springer. V. 197(3). P. 1024–1060.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.В. Пакшиным.

Поступила в редакцию 03.03.2024

После доработки 29.09.2024

Принята к публикации 02.10.2024